

شبهه سازی جریان های چندفازی با استفاده از روش حجم  
سیال (Volume Of Fluid: VOF)

محمد رضا کلیچ

## چکیده

مدل VOF بهترین و ساده ترین مدل مناسب برای تعیین مرز مشترک بین فازهای جریان چندفازی است. در واقع این مدل یک مدل Volume Tracking بوده که بر اساس مدل قدیمی تر Marker and cell: MAC که یک مدل Surface-tracking می باشد، توسعه یافته است. در مدل VOF یک دسته معادلات ممنتوم بطور مشترک برای تمامی فازها، و برای هر فاز یک معادله کسر حجمی - که از جنس معادله پیوستگی می باشد- حل می شود. با افزوده شدن قابلیت استفاده از مدل Level Set همراه با VOF در قسمت (Coupled Level Set+VOF) امکان شبیه سازی هرچه دقیقتر مرز بین فازها فراهم شده است. در واقع VOF برای ردیابی و تعیین مرز بین فازها طراحی و توسعه یافته و می توان گفت که از این مدل بطور مشخص برای شبیه سازی جریان های چندفازی غیر امتزاجی (Immiscible) و برخورد از مرزهای مشخص بین فازها، استفاده می شود. عمده ترین موارد کاربرد این مدل در صنایع کشتی سازی، سازه های دریایی، عمران آب، نفت و گاز و غیره می باشد. در این نوشتار تئوری های مطرح در مدل VOF با محوریت نرم افزار Fluent ارائه شده است.

## فهرست مطالب

۵	فهرست شکل ها
۶	مقدمه
۸	۱ معادله کسر حجمی
۸	۱-۱ فرمولاسیون ضمنی (The Implicit Formulation)
۹	۲-۱ فرمولاسیون صریح (The Explicit Formulation)
۱۰	۳-۱ میانیابی نزدیک مرز بین فازها
۱۱	۱-۳-۱ روش تجدید ساختار هندسی (The Geometric Reconstruction Scheme)
۱۱	۲-۳-۱ روش Donor-Acceptor
	۳-۳-۱ روش تسخیر مرز تراکمی برای شبکه‌های دلخواه (The Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes (CICSAM))
۱۲	۴-۳-۱ روش تراکمی و تغییرات مرز-مدل-مبنا (The Compressive Scheme and Interface-Model-based Variants)
۱۲	۵-۳-۱ روش بیشینه گرادیان محصور (Bounded Gradient Maximization (BGM))
۱۴	۲ خصوصیات سیال
۱۵	۳ معادله مومنتم
۱۶	۴ معادله انرژی
۱۸	۵ سایر معادلات اسکالر
۱۹	۶ کشش سطح و چسبندگی دیواره (Surface Tension and Wall Adhesion)
۱۹	۶-۱ کشش سطح
۱۹	۱-۱-۶ مدل نیروی سطحی پیوسته (Continuum Surface Force Model: CSF)
۲۱	۲-۱-۶ مدل تنش سطحی پیوسته (Continuum Surface Stress: CSS)
۲۲	۳-۱-۶ مقایسه بین روش‌های CSF و CSS
۲۳	۴-۱-۶ اهمیت اثرات کشش سطحی
۲۳	۲-۶ چسبندگی دیواره (Wall Adhesion)
۲۴	۳-۶ چسبندگی پرش (Jump Adhesion)
۲۵	۷ جریان کانال باز (Open Channel Flow)
۲۶	۷-۱ شرایط مرزی در بالادست (Upstream Boundary Conditions)
۲۶	۱-۱-۷ شرط مرزی فشار ورودی (Pressure Inlet)
۲۷	۲-۱-۷ دبی جرمی (Mass Flow Rate)
۲۷	۳-۱-۷ تعیین کسر حجمی
۲۷	۲-۷ شرایط مرزی پایین دست (Downstream Boundary Condition)
۲۸	۱-۲-۷ شرط مرزی فشار خروجی (Pressur-Outlet Boundary Condition)
۲۸	۲-۲-۷ جریان خروجی (Outflow Boundary Condition)
۲۹	۳-۲-۷ مشخص نمودن کسر حجمی جریان پشت (Backflow Volume Fraction)
۲۹	۷-۳ میرایی امواج با استفاده از روش Numerical Beach Treatment (NBT)
۳۱	۸ شرایط مرزی موج کانال باز (Open Channel Wave Boundary Condition)

- ۱-۸ تئوری موج هوایی (Airy Wave Theory) ..... ۳۵
- ۲-۸ تئوری‌های موج استوکس (Stokes Wave) ..... ۳۶
- ۳-۸ تئوری امواج سنویدال/سولیتاری (Cnoidal/Solitary wave) ..... ۳۷
- ۴-۸ انتخاب تئوری موج مناسب ..... ۳۹
- ۵-۸ برهم نهی امواج خطی (Superposition of Linear Waves) ..... ۴۲
- ۶-۸ مدلسازی امواج تصادفی با استفاده از طیف موج (Modeling of Random Waves Using Wave Spectrum) ..... ۴۳
- ۱-۶-۸ تعاریف ..... ۴۳
- ۲-۶-۸ تئوری پیاده سازی طیف موج ..... ۴۶
- ۱-۲-۶-۸ امواج دراز تصادفی تک راستا (Long-Crested Random Waves (Unidirectional)) ..... ۴۶
- ۲-۲-۶-۸ امواج تصادفی کوتاه چند راستا (Short-Crested Random Waves (Multi-Directional)) ..... ۴۷
- ۳-۲-۶-۸ برهم نهی مؤلفه‌های موج منفرد با استفاده از طیف موج ..... ۴۹
- ۳-۶-۸ انتخاب طیف موج مناسب و ورودی‌ها ..... ۵۰
- ۵۴ کوپلینگ مدل‌های VOF و Level-Set ..... ۵۴
- ۱-۹ تئوری ..... ۵۴
- ۱-۱-۹ نیروی کشش سطحی ..... ۵۵
- ۲-۱-۹ شروع مجدد (Re-Initialization) تابع Level-Set براساس روش هندسی ..... ۵۶

## فهرست شکل ها

- شکل - ۱: الف: حالت حقیقی مرز تقابل بین فازها؛ ب: شبیه‌سازی مرز تقابل بین فازها با استفاده از روش تغییر ساختار هندسی؛ ج: شبیه‌سازی مرز تقابل بین فازها با استفاده از روش donor-acceptor ..... ۱۰
- شکل - ۲: اندازه زاویه برخورد ..... ۲۴
- شکل - ۳: شماتیک هندسی میرایی امواج ..... ۳۰
- شکل - ۴: شماتیک پارامترهای هندسی امواج ..... ۳۱
- شکل - ۵: شماتیک تولید، توسعه و تکامل موج ناشی از وزش باد ..... ۳۲
- شکل - ۶: شماتیکی از انواع امواج در تئوری‌های مختلف تولید موج ..... ۳۳
- شکل - ۷: تصویری زیبا از یک موج تنها (Solitary) ..... ۳۷
- شکل - ۸: پارامترهای هندسی توزیع استاتیک موج ..... ۴۴
- شکل - ۹: تصویری زیبا از دریای موج دراز ..... ۴۵
- شکل - ۱۰: مقایسه بین دریا در دو حالت موج کوتاه و موج بلند ..... ۴۵
- شکل - ۱۱: یک طیف موج متداول ..... ۴۹
- شکل - ۱۲: شماتیک برش مرز مشترک در سلول جبهه مرزی ..... ۵۷
- شکل - ۱۳: فاصله یک نقطه مشخص تا قطعه برش در سلول جبهه مرزی ..... ۵۸

در روش حجم سیال (Volume OF Fluid: VOF)، شبیه‌سازی دو یا چند سیال غیر قابل نفوذ در یکدیگر با استفاده از حل معادلات مومنتم و مسیریابی کسر حجمی هر یک از سیالات در دامنه محاسباتی، امکان پذیر است. کاربردهای کلی این روش شامل شکست جت (Jet-Breakup)، حرکت حبابهای بزرگ در یک مایع پس از عبور از یک مانع و همچنین مسیریابی پایدار و یا گذرای هرگونه محیط گاز-مایع است. به‌صورت برای استفاده از مدل VOF محدودیتهایی وجود دارد. این محدودیتهای عبارتست از:

- برای استفاده از مدل VOF حتماً باید از حلگر فشار مینا (Pressure-Based) استفاده کرد چراکه این مدل با هیچ یک از الگوریتمهای حلگر چگالی مینا (Density-Based) سازگار نیست.
- تمام المانهای شبکه باید مملو از یک فاز یا ترکیبی از فازها باشد. بعبارت دیگر برای استفاده از این مدل نباید هیچ المانی تهی از سیال باشد.
- تنها یک فاز می‌تواند به عنوان گاز ایده‌ال تعریف شود. البته محدودیتی در اعمال تراکم‌پذیری مایعات با استفاده از توابع اعریف شده توسط کاربر (UDFs) وجود ندارد.
- جریانهای پررودیک را نمی‌توان به‌مراه استفاده از مدل VOF شبیه‌سازی کرد.
- از فرمولاسیون گام زمانی مرتبه دوم ضمنی (Implicit) نمی‌توان همراه با روش صریح (Explicit) VOF استفاده نمود.
- مدل VOF Level Set کوپل شده را نمی‌توان برای شبکه‌های چند وجهی (Polyhedral Meshes) بکار برد.
- مدل VOF با مدل‌های احتراق پیش آمیخته (Premixed)، غیر پیش آمیخته (Non-Premixed) و پیش آمیخته جزئی (Partially-Premixed) سازگار نیست.

در نرم‌افزار FLUENT، مدل VOF عموماً برای حل مسائل ناپایا استفاده می‌شود اما برای بعضی مسائل پایای خاص نیز قابل استفاده است. محاسبات مدل VOF پایا تنها برای حالتی که حل جریان مستقل از شرایط اولیه بوده و همچنین مرزهای فازها در ورودی جدا از یکدیگر باشد کاربرد دارد. بعنوان مثال سطح آزاد درون یک فنجان گردان به سطح اولیه سیال بستگی دارد که چنین مسئله‌ای باید بصورت ناپایا حل شود. از طرفی جریان آب در داخل کانال همراه با هوای روی آن، بصورتیکه ورودی هوا جدا باشد می‌تواند بصورت پایا حل شود.

مدل VOF برای جریانهای دو یا چند فازی غیر قابل نفوذ بکار می‌رود. برای هر فاز اضافه شده، متغیر کسر جرمی فاز در المان محاسباتی منظور می‌شود. بطور کلی در هر حجم کنترل، مجموع کسرهای حجمی باید برابر یک باشد. از آنجا که کسر حجمی هر یک از فازها در هر المانی مشخص می‌باشد، بنابراین متغیرها و ویژگیهای جریان در هر المان براساس کسر حجمی فازها محاسبه می‌شود. بعنوان مثال برای سیال  $q$  در یک جریان چند فازی که در یک المان کسر حجمی آن بصورت  $\alpha_q$  تعریف شده، خواهیم داشت:

- $\alpha_q = 0$  : المان خالی از سیال qام می‌باشد.
- $\alpha_q = 1$  : المان پر از سیال qام می‌باشد.
- $0 < \alpha_q < 1$  : المان شامل سیال qام به‌مراه سیال دیگر می‌باشد.

براساس مقدار محلی  $\alpha_q$  ، خصوصیات جریان محاسبه می‌شود. مسیریابی تقابل فازها در دامنه محاسباتی بوسیله حل معادله پیوستگی برای کسر حجمی فازها انجام می‌شود.

www.cfd-mrk.ir

## ۱ معادله کسر حجمی

همانطور که گفته شد روش VOF برای جریان‌هایی که دارای مرز(های) مشخصی بین فازها هستند بکار می‌رود. از این رو رصد بین مرز(های) فازها با حل معادله پیوستگی برای کسر حجمی یک یا چند فاز انجام می‌شود. در حالت کلی برای فاز  $q$ ، معادله پیوستگی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho_q} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (1)$$

که  $\dot{m}_{qp}$  انتقال جرم از فاز  $q$  به فاز  $p$  و  $\dot{m}_{pq}$  انتقال جرم از فاز  $p$  به فاز  $q$  می‌باشد. طبق پیش فرض ترم شمه سمت راست معادله،  $S_{\alpha_q}$  صفر است مگر اینکه کسی بخواهد منبع جرمی خاصی برای فاز  $q$  در داخل دامنه محاسباتی تعریف کند. باید توجه داشت که معادله کسر حجمی برای فاز اصلی بطور مستقیم حل نمی‌شود بلکه براساس رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (2)$$

معادله کسر حجمی ممکن است از طریق فرمول زمانی ضمنی یا صریح حل شود.

### ۱-۱ فرمولاسیون ضمنی (The Implicit Formulation)

زمانیکه از فرمولاسیون ضمنی استفاده می‌شود، معادله کسر حجمی با روش زیر گسسته سازی می‌شود:

$$\frac{\alpha_q^{n+1} \rho_q^{n+1} - \alpha_q^n \rho_q^n}{\Delta t} V + \sum_f (\rho_q^{n+1} U_f^{n+1} \alpha_{q,f}^{n+1}) = \left[ S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \right] V \quad (3)$$

که  $n+1$ : بیانگر گام زمانی فعلی،

$n$ : گام زمانی قبلی،



$\alpha_q^{n+1}$ : مقدار کسر حجمی فاز  $q$  در المان در گام زمانی  $n+1$ .

$\alpha_q^n$ : مقدار کسر حجمی فاز  $q$  در المان در گام زمانی  $n$ .

$\alpha_{q,f}^{n+1}$ : مقدار سطح کسر حجمی فاز  $q$  در گام زمانی  $n+1$ .

$U_f^{n+1}$ : شار حجمی عبوری از سطح در گام زمانی  $n+1$  و

$V$ : حجم سلول (المان) می‌باشند.

از آنجائیکه کسر حجمی در گام زمانی حاضر تابعی از سایر مقادیر در همین گام زمانی است، بنابراین یک معادله انتقال اسکالر بصورت تکرار برای کسر حجمی فاز(های) ثانویه در هر گام زمانی حل می‌شود. شارهای سطح با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی متنوعی میانجی می‌شوند. فرمولاسیون ضمنی برای هر دور رژیم جریان پایا و ناپایا قابل استفاده است.

## ۱-۲ فرمولاسیون صریح (The Explicit Formulation)

فرمولاسیون صریح وابسته به زمان بوده و با استفاده از روش زیر میانجی می‌شود:

$$\frac{\alpha_q^{n+1} \rho_q^{n+1} - \alpha_q^n \rho_q^n}{\Delta t} V + \sum_f (\rho_q U_f^n \alpha_{q,f}^n) = \left[ \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) + S_{\alpha_q} \right] V \quad (4)$$

که  $n+1$ : بیانگر گام زمانی فعلی،

$n$ : گام زمانی قبلی،

$\alpha_q^{n+1}$ : مقدار کسر حجمی فاز  $q$  در المان در گام زمانی  $n+1$ .

$\alpha_q^n$ : مقدار کسر حجمی فاز  $q$  در المان در گام زمانی  $n$ .

$\alpha_{q,f}^n$ : مقدار سطح کسر حجمی فاز  $q$  در گام زمانی  $n$ .

$U_f^n$ : شار حجمی عبوری از سطح در گام زمانی  $n+1$  براساس سرعت عمود بر سطح و

۷: حجم سلول (المان) می‌باشند.

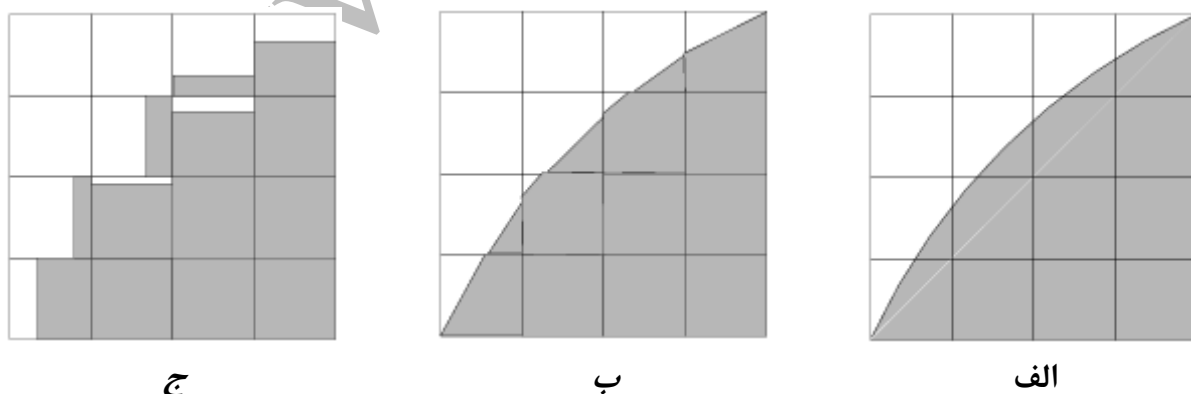
از آنجائیکه کسر حجمی در گام زمانی فعلی مستقیماً براساس مقادیر گام زمانی قبلی حساب می‌شود لذا، به حل مبتنی بر تکرار معادله انتقال در هر گام زمانی نیازی نیست. شارهای سطح می‌توانند با استفاده از رصد مرز (Interface Tracking) بین فازها یا روش‌های تسخیر حجم (Volume Capturing) مثل Geo-Reconstruction، CICSAM، تراکمی (Compressive) و HRIC تصحیح شده، میانبایی شوند.

در نرم افزارهایی مثل Fluent، گام زمانی بطور خودکار و به منظور تجمیع معادله کسر حجمی ریز می‌شود. اما به هر حال امکان تغییر گام زمانی بصورت دستی و با استفاده از عدد کورانت وجود دارد. البته در این نرم افزار به روز رسانی کسر حجمی برای هر گام زمانی یا هر تکرار در گام زمانی نیز امکان پذیر است.

باید توجه داشت که روش صریح تنها برای جریان‌های ناپایا و وابسته به زمان کاربرد دارد.

### ۱-۳ میانبایی نزدیک مرز بین فازها

در نرم‌افزار FLUENT، فرمولاسیون حجم محدود نیازمند آنست که شارهای جابجایی و انتشار بین وجه‌های حجم کنترل (المان) محاسبه شده و با ترم‌های چشمه در همان حجم کنترل بالانس شوند. در روش‌های تجدید ساختار هندسی (Geo-Reconstruction) و donor-acceptor نرم‌افزار FLUENT از یک میانبایی ویژه برای تعیین کسر حجمی فازها در هر المان استفاده می‌کند. شکل (۱) نمایشگر مرز حقیقی تقابل بین فازها و مفروضات دو روش یاد شده می‌باشد.



شکل - ۱: الف: حالت حقیقی مرز تقابل بین فازها؛ ب: شبیه‌سازی مرز تقابل بین فازها با استفاده از روش تغییر ساختار هندسی؛ ج:

شبیه‌سازی مرز تقابل بین فازها با استفاده از روش donor-acceptor.

روش‌های صریح و ضمنی نیز برای میانمایی نزدیک مرزها از گسسته سازی‌های پیشرو استاندارد (First-Order Upwind)، مرتبه دوم (Second-Order Upwind)، کوئیک (Quick)، HIRC تصحیح شده، CICSAM (The Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes) و تراکمی (Compressive) استفاده می‌کنند.

### ۱-۳-۱ روش تجدید ساختار هندسی (The Geometric Reconstruction Scheme)

در روش تغییر ساختار هندسی، برای المانهایی که مملو از یک فاز است از میانمایی استاندارد استفاده می‌شود. اما در المانهایی که شامل مرز تقابل بین فازها می‌باشد از روش تجدید ساختار هندسی استفاده می‌شود. در این روش برای تعیین مرز تقابل بین فازها، تقریب Piecewise-linear بکار می‌رود. روش تجدید ساختار هندسی، دقیقترین روش محاسبه بوده و برای شبکه‌های بی‌سازمان نیز کاربرد دارد. در نرم‌افزار FLUENT روش یاد شده برای شبکه‌های بی‌سازمان عمومیت یافته است. لازم به توضیح است که در این روش مرز تقابل بین فازها خطی فرض شده (شکل ۱-الف) و بهمین خاطر از فرم خطی معادلات برای محاسبات استفاده می‌شود.

اولین مرحله در روش تجدید ساختار هندسی، محاسبه مرز (بطور خطی) نسبت به مرکز المان پر از فازها بوده که براساس کسر حجمی و مشتقات مربوطه انجام می‌شود. مرحله دوم محاسبه میزان پیشروی سیال در المانها می‌باشد که براساس توزیع سرعت‌های عمودی و مماسی روی هر یک از وجوه المانها انجام می‌گردد. در نهایت در مرحله سوم، کسر حجمی فازها در المانها با بالانس کردن شارهای محاسبه شده در مرحله قبل تعیین می‌شود.

باید توجه داشت که برای استفاده از روش تجدید ساختار هندسی لازمست، جریان بصورت ناپایا در نرم‌افزار FLUENT حل شود. همچنین در صورت استفاده از شبکه‌های ثابت (یعنی عدم استفاده از شبکه‌های متحرک) نیز باید اطمینان داشت که دیواره‌ها در دامنه محاسباتی، از دو طرف به سیال مرتبط نباشند. در غیر اینصورت نیاز است که آنها را از یکدیگر جدا نمود.

### ۱-۳-۲ روش Donor-Acceptor

در روش Donor-Acceptor، برای المانهایی که مملو از یک فاز می‌باشد از میانمایی استاندارد استفاده می‌شود. اما در المانهایی که شامل مرز تقابل بین فازها بوده از خود روش Donor-Acceptor استفاده می‌شود. این روش برای اندازه‌گیری میزان پیشروی سیالها

در وجوه المانها بکار می‌رود. هریک از المانهای شامل چند فاز به قسمتهای مملو از هر یک از فازها (شکل ۱- ج) تقسیم شده و بنابراین میزان پیشروی هر فاز در داخل یک المان به مقادیر ۱ (پر از یک فاز) یا صفر (خالی از یک فاز) محدود می‌شود.

راستای مرز تقابل فازها در اندازه‌گیری شار وجوه المانها تأثیر گذار است. این راستا بسته به جهت گرادیان کسر حجمی فاز  $\alpha$ ، می‌تواند افقی یا عمودی باشد. وابستگی‌های راستای مرز تقابل بین فازها نظیر حرکت و مقادیر شارها با استفاده از روشهای پیشرو و پسرو به تنهایی، و یا ترکیبی از آنها مشخص می‌شود.

قابل توجه است که برای استفاده از روش donor-acceptor لازمست جریان بصورت ناپایا حل شود. همچنین این روش تنها برای شبکه‌های با سازمان کاربرد دارد. بعلاوه در صورت استفاده از شبکه‌های چند بلوکی Conformal، نیز باید اطمینان داشت که دیواره‌ها در دامنه محاسباتی بدون ضخامت (از دو طرف به سیال مرتبط نباشد) باشد. در غیر اینصورت نیاز است که آنها را از یکدیگر جدا نمود.

### ۱-۳-۳ روش تسخیر مرز تراکمی برای شبکه‌های دلخواه (The Compressive

#### (Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes (CICSAM))

متد تسخیر مرز تراکمی برای شبکه‌های دلخواه براساس تحقیق اوبینک (Ubbink) یک روش تفاضلی با دقت بالا می‌باشد. روش CICSAM بویژه برای جریان‌هایی با نسبت لزجت بالا بین فازها مناسب می‌باشد. این قابلیت در روش صریح Fluent وجود داشته و به اندازه روش تجدید ساختار هندسی از دقت خوبی برای پیش‌بینی مرز بین فازها برخوردار است.

### ۱-۳-۴ روش تراکمی و تغییرات مرز-مدل-مبنا (The Compressive Scheme and

#### (Interface-Model-based Variants

روش تراکمی یک روش تجدید ساختار مرتبه دوم براساس محدودگر شیب (Slope Limiter) می‌باشد. محدودگر شیب در روش‌های گسسته سازی فضایی (Spatial) برای پرهیز از نوسانات جدی یا عدم ثابت که معمولا در روش‌های گسسته سازی مرتبه بالاتر بخاطر تغییرات ناگهانی در دامنه محاسباتی رخ می‌دهد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادله تئوری زیر برای گسسته سازی ناحیه‌ای و گسسته سازی محلی فاز که از قالب روش تراکمی (Compressive) استفاده می‌کند، کاربرد دارد:

$$\alpha_f = \alpha_d + \beta \nabla \alpha_d \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

که  $\alpha_f$ : مقدار VOF سطح،

$\alpha_d$ : مقدار VOF سلول دهنده (Donor Cell)،

$\beta$ : محدودگر شیب،

$\nabla \alpha_d$ : مقدار گرادیان VOF سلول دهنده و

$d\vec{r}$ : بردار فاصله وجه تا سلول

محدودگر شیب،  $\beta$ ، بین ۰ تا ۲ تغییر می‌کند که بسته به مقدار آن روش گسسته سازی مورد استفاده متفاوت می‌باشد و حالت‌های زیر را شامل می‌شود:

برای  $\beta = 0$ ؛ گسسته سازی پیشرو مرتبه اول،

$0 < \beta < 1$ : ترکیبی وزنی از روش‌های پیشرو مرتبه اول و مرتبه دوم براساس مقدار  $\beta$ ،

$\beta = 1$ : گسسته سازی مرتبه دوم تجدید ساختار محصور توسط بیشترین/کمترین کسر حجمی،

$1 < \beta < 2$ : ترکیبی وزنی از دو روش مرتبه دوم و تراکمی براساس مقدار  $\beta$  و

$\beta = 2$ : روش تراکمی (Compressive).

روش تراکمی به انتخاب نوع رژیم مرز بین فازها بستگی دارد. اگر از مدلسازی رژیم مرزی واضح (Sharp) استفاده شود، روش تراکمی تنها برای مرزهای واضح مناسب است. اما به هر صورت اگر مدلسازی مرز واضح/مبهم (Sharp/Dispersed) انتخاب شود روش تراکمی برای هر دو مدلسازی مرز واضح و مبهم مناسب خواهد بود.

**۱-۳-۵ روش بیشینه گرادیان محصور ( Bounded Gradient Maximization )****((BGM))**

روش BGM برای پوشش مرزهای واضح با مدل VOF در مقایسه با روش‌های تجدید ساختار هندسی، ارائه شده است. در حال حاضر این قابلیت در نرم افزار Fluent تنها برای پایا بوده و برای جریان‌های ناپایا قابل استفاده نیست. در روش BGM گسسته سازی به گونه‌ای اتفاق می‌افتد که مقدار محلی گرادیان‌ها را بیشینه کند.

www.cfd-mrk.ir

## ۲ خصوصیات سیال

ویژگیهای سیال در معادلات انتقال توسط سهم مولفه‌های فازها در هر حجم کنترل بدست می‌آید. بعنوان مثال در جریانهای دو فازی که با زیر نویسهای (۲) مشخص شده، چگالی جریان با استفاده از معادله (۶) محاسبه می‌شود.

$$\rho = \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \quad (۶)$$

بطور کلی برای جریانهای n فازی، چگالی متوسط هر المان طبق رابطه (۴-۱۵) بدست می‌آید.

$$\rho = \sum \alpha_q \rho_q \quad (۷)$$

تمام خصوصیات مشابه جریان نظیر لزجت نیز براساس روش منطق معادله (۶) محاسبه می‌شود.

### ۳ معادله مومنتم

برای کل دامنه محاسباتی، یک معادله مومنتم حل شده و میدان سرعت بدست آمده، بین فازها تقسیم می‌شود. معادله مومنتم (معادله ۸) به کسر حجمی تمام فازها به‌مراه خصوصیات  $\rho$  و  $\mu$  بستگی دارد.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] + \rho \vec{g} + \vec{F} \quad (8)$$

تنها محدودیتی که در تقسیم کردن میدان جریان جود دارد آنست که در حالتی که اختلاف سرعت بین فازها زیاد باشد، دقت سرعت محاسبه شده در نزدیکی مرز تقابل بین فازها کاهش می‌یابد. همچنین اگر نسبت لزجت بین دو فاز بیشتر از ۱۰۰۰ باشد آنگاه شاهد بروز مشکلاتی در همگرایی حل خواهیم بود. استفاده از روش CICSAM در چنین مسائلی مناسب بوده و موجب کاهش این مشکلات می‌شود.



## ۴ معادله انرژی

معادله انرژی که بین فازها مشترک می‌باشد طبق رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho E + p)) = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + S_h \quad (9)$$

در مدل VOF، انرژی و دما بصورت متغیرهای متوسط گیری شده جرمی همانند معادله (۱۰) تعیین می‌گردند.

$$E = \frac{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q E_q}{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q} \quad (10)$$

که  $E_q$  انرژی هر فاز و مبتنی بر حرارت ویژه فاز و دمای مشترک می‌باشد. خصوصیات  $\rho$  و  $k_{eff}$  (هدایت گرمایی مؤثر) بین فازها به اشتراک گذاشته می‌شود. ترم چشمه،  $S_h$ ، شامل اثرات منبع حرارتی تابشی و همچنین سایر منابع حجمی دیگر می‌باشد. همچون میدان سرعت، دقت محاسبه دما در نزدیکی مرز بین فازها به میزان اختلاف دمای بین فازها بستگی دارد. هر چقدر این اختلاف بیشتر باشد دقت محاسبات دما در نزدیکی مرز حد فاصل بین فازها کاهش می‌یابد. این مسئله زمانی بغرنج می‌شود که مشخصات حرارتی مواد به چندین مرتبه (بیش از ۱۰ برابر) برسد. به عنوان مثال اگر مدل شامل یک فلز ذوب شده و مایع در مجاورت هوا باشد ضریب هدایت فلز مایع بیش از ۱۰۰۰۰ برابر هوا خواهد بود. چنین اختلاف خواصی منجر به ایجاد ضرائب غیر ایزوتروپیک در معادله انرژی شده که ممکن است همگرایی و دقت محاسبات را بطور قابل توجهی تحت تأثیر قرار دهد.

## ۵ سایر معادلات اسکالر

بسته به مسئله تعریف شده، ممکن است معادلات دیگری به دستگاه مختصات اضافه شود. در حالتیکه جریان آشفته باشد، تنها یک مجموعه معادلات انتقال حل شده و متغیرهایی نظیر  $k$  و  $\varepsilon$  و یا تنش برشی بین فازهای میدان جریان، تقسیم می‌شود.

www.cfd-mrk.ir

## ۶ کشش سطح و چسبندگی دیواره ( Surface Tension and Wall Adhesion)

در مدل VOF تأثیر کشش سطحی سیالها در امتداد مرز تقابل بین فازها در نظر گرفته شده است. همچنین این مدل می‌تواند با تعریف پارامتر زاویه برخورد بین سیال و دیواره‌ها و همچنین پرش تخلخل (Porous Jump)، توسعه یابد. بدیهی است که به خاطر تغییرات ضریب کشش سطحی شاهد بروز ترم‌های تنش مماسی اضافی باشیم. ضریب کشش سطحی می‌تواند بصورت یک مقدار ثابت یا تابعی از هر متغیری از جمله دما باشد. توجه داشته باشید که اثرات ضریب کشش سطحی متغیر تنها برای پدیده‌های همراه با جاذبه صفر یا غیر صفر مهم است.

### ۶-۱ کشش سطح

کشش سطحی از نیروهای جاذبه بین ملکولی در سیال چند فازی، ناشی می‌شود. بعنوان مثال یک حباب هوا را در آب در نظر بگیرید. در داخل حباب نیروی اعمالی روی یک ملکول از طرف ملکولهای مجاور صفر است. اما کل ملکولها یک نیرو به سطح کروی (جهت مقعر سطح) سیال وارد می‌کند. از طرفی بخاطر گرادیان فشار سیال در بر گیرنده حباب، یک نیروی خارجی نیز به سطح کروی (جهت محدب سطح) وارد می‌شود. کشش سطح در واقع بالانس کننده بین نیروهای داخلی و خارجی سطح حباب می‌باشد. بهمین علت مساحت سطح حباب یاد شده که بعنوان مرز تقابل بین دو فاز آب و هوا می‌باشد، تا جای ممکن کاهش می‌یابد تا حباب کروی شکل شود. در نرم افزار Fluent دو مدل کشش سطحی وجود دارد. مدل نیروی سطحی پیوسته ( Continuum Surface Force: CSF) و تنش سطحی پیوسته (Continuum Surface Stress: CSS). هر دو مدل در این فصل توضیح داده شده‌اند.

باید توجه داشت محاسبه اثرات کشش سطحی در شبکه‌های بی‌سازمان (المان‌های مثلثی در دو بعد و ۴ وجهی در سه بعد) به اندازه شبکه‌های باسازمان متشکل از المان‌های مربعی یا مکعبی دقیق نیست. بنابراین در ناحیه‌ای که اثرات کشش سطحی بسیار مهم است لازمست از شبکه باسازمان استفاده شود.

### ۶-۱-۱ مدل نیروی سطحی پیوسته (Continuum Surface Force Model: CSF)

مدل نیروی سطحی پیوسته (CSF) برگرفته از مدل برک‌بیل (Breakbill) و همکاران می‌باشد. با این مدل، کشش سطحی در مدل VOF بصورت یک ترم چشمه در معادله مومنتم اضافه می‌شود. برای درک منشأ این ترم چشمه، حالت خاصی را در نظر بگیرید که

در آن کشش سطحی در امتداد سطح ثابت بوده و تنها مولفه عمود بر مرز تقابل در نظر گرفته می‌شود. این مهم می‌تواند بصورت افت فشار در امتداد سطح که وابسته به ضریب کشش سطحی،  $\sigma$ ، و انحنای اندازه گیری شده می‌باشد، بیان گردد. در رابطه (۱۱)،  $R_1$  و  $R_2$  اندازه شعاعها در جهت عمود برهم است.  $p_1$  و  $p_2$  نیز فشارهای سیالها در هر یک از طرفین سطح می‌باشد.

$$p_2 - p_1 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

در نرم‌افزار FLUENT، فرمولاسیون CSF در جاهایی که انحنای سطح از گرادیانهای محلی عمود بر مرز تقابل محاسبه شده، بکار می‌رود. معادله (۱۲) بیانگر رابطه بین سطح عمود،  $n$ ، و گرادیان کسر حجمی فاز ۲ (فاز ثانویه) می‌باشد. میزان انحنای  $K$ ، نیز طبق معادله (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$n = \nabla \alpha_q \quad (12)$$

$$K = \nabla \cdot \hat{n} \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{n}{|n|} \quad (14)$$

کشش سطحی را می‌توان بصورت ترم‌های اختلاف فشار در دو طرف سطح نوشت. بهمین خاطر نیروی حجمی بصورت یک ترم چشمه به معادله مومنتم اضافه می‌شود. این نیروی حجمی،  $F_{vol}(x)$ ، براساس معادله (۱۵) محاسبه می‌شود. باید توجه داشت که این ترم چشمه تنها به یک طرف مرز تقابل وارد می‌شود که در این نرم‌افزار ر جهت فاز ثانویه در نظر گرفته شده است.

$$F_{vol} = \sum_{pairs\ i,j, i < j} \sigma_{ij} \frac{\alpha_i \rho_i \kappa_j \nabla \alpha_j + \alpha_j \rho_j \kappa_i \nabla \alpha_i}{\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)} \quad (15)$$

این توصیف، امکان برهم نهی هموار (Smooth Superposition) نیروهای نزدیک المان‌هایی که در آنها بیش از دو فاز حاضر هستند را فراهم می‌سازد. اگر تنها دو فاز در یک المان وجود داشته باشد آنگاه  $k_i = -k_j$  و  $\nabla \alpha_i = -\nabla \alpha_j$  و معادله (۱۵) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$F_{vol} = \sum_{pairs\ i,j,i < j} \sigma_{ij} \frac{\alpha_i \rho_i \kappa_j \nabla \alpha_j + \alpha_j \rho_j \kappa_i \nabla \alpha_i}{\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)} \quad (16)$$

که  $\rho$  چگالی میانگین حجمی بوده و با استفاده از معادله (۷) محاسبه می‌شود. معادله (۱۶) نشان می‌دهد که ترم چشمه کشش سطحی برای هر سلول متناسب با چگالی میانگین در آن سلول می‌باشد.

### ۶-۱-۲ مدل تنش سطحی پیوسته (Continuum Surface Stress: CSS)

روش CSS جایگزینی برای مدل‌سازی کشش سطحی در فرم بقایی (Conservative)، بر خلاف فرم غیر بقایی روش CSF می‌باشد. در این روش از محاسبات مستقیم انحنا پرهیز شده و می‌توان همچون یک متغیر غیر ایزوتروپیک از مدل‌سازی نیروهای مویرگی مبتنی بر تنش‌های سطحی بیان نمود. در روش CSS تانسور تنش سطحی ناشی از کشش سطحی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \sigma (I - \hat{n} \otimes \hat{n}) |\vec{n}| \quad (17)$$

$$\vec{n} = \nabla \alpha \quad (18)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (19)$$

$l$ : تانسور واحد،

$\sigma$ : ضریب کشش سطحی،

$\otimes$ : تولید تانسور از دو بردار نرمال اصلی و بردار نرمال انتقال یافته،

$\alpha$ : کسر حجمی و

$\vec{n}$ : گرادیان کسر حجمی می‌باشد.

$$T = \sigma \left( |\nabla \alpha| I - \frac{\nabla \alpha \otimes \nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (20)$$

نیروی تنش سطحی نیز طبق معادله (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$F_{CSS} = \nabla \cdot T \quad (21)$$

### ۳-۱-۶ مقایسه بین روش‌های CSF و CSS

روش CSS از مزایای اندکی نسبت به CSF بالاخص برای مسائل درگیر با تنش سطحی متغیر برخوردار است. هر دو روش CSF و CSS جریانهای پارازیته ناشی از عدم تعادل گرادیان فشار و نیروی کشش سطحی را عرضه می‌کنند.

در روش CSF نیروی کشش سطحی در فرم غیر بقایی از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$F_{CSF} = \sigma k \nabla \alpha \quad (22)$$

که K انحنا می‌باشد. البته معادله فوق تنها برای کشش سطحی ثابت صادق است. برای کشش سطحی متغیر، فرمولاسیون CSF به مدلسازی یک ترم اضافی در جهت مماس بر مرز بین فازها و براساس گرادیان کشش سطحی، نیاز دارد.

در متد CSS، نیروی کشش سطحی در فرم بقایی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{CSS} = \nabla \cdot \left[ \sigma \left( |\nabla \alpha| I - \frac{\nabla \alpha \otimes \nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \right] \quad (23)$$

روش CSS به هیچگونه محاسبه مستقیمی برای تعیین انحنا نیازی ندارد. بنابراین در نواحی نظیر گوشه‌های تیز (Sharp Corner) پاسخ‌های فیزیکی تری می‌دهد! همچنین این متد به ترم اضافی برای متغیر کشش سطح ناشی از فرمولاسیون بقاء نیز احتیاجی ندارد.

## ۴-۱-۶ اهمیت اثرات کشش سطحی

اهمیت اثرات کشش سطحی براساس دو متغیر بدون بعدی اعداد رینولدز،  $Re$ ، و موینگی،  $Ca$ ، یا اعداد رینولدز،  $Re$ ، و وبر (Weber)،  $We$ ، تعیین می‌گردد. برای  $Re \ll 1$  عدد موینگی،  $Ca$ ، (معادله ۲۴) و برای  $Re \gg 1$  عدد وبر،  $We$ ، (معادله ۲۵) به عنوان معیار در نظر گرفته می‌شوند.

$$Ca = \frac{\mu U}{\sigma} \quad (24)$$

$$We = \frac{\rho L U^2}{\sigma} \quad (25)$$

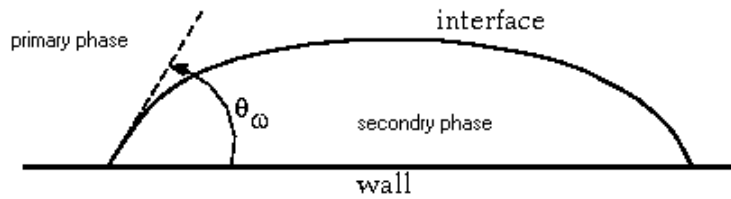
$U$  سرعت جریان آزاد است. اگر شرط  $We \gg 1$  یا  $Ca \gg 1$  باشد آنگاه اثرات تنش سطحی قابل نظر کردن است.

## ۲-۶ چسبندگی دیواره (Wall Adhesion)

علاوه بر کشش سطحی، چسبندگی دیواره نیز در مدل VOF قابل شبیه‌سازی است. این مدل برگرفته از تحقیق برک بیل و همکاران می‌باشد. برای استفاده از مدل چسبندگی دیواره، لازمست که زاویه برخورد سیال با دیوار نیز مشخص شده تا بتوان سطح عمود بر المانهای نزدیک دیواره را متعادل نمود. این مهم بعنوان نتایج شرائط مرزی دینامیک در تعادل انحناى سطح در نزدیکی دیواره در نظر گرفته می‌شود.

اگر  $\theta_w$ ، زاویه برخورد سیال با دیواره و  $\hat{n}_w$  و  $\hat{t}_w$  به ترتیب بردارهای یکه عمود و مماس بر دیواره باشد، آنگاه مولفه عمود بر سطح در نزدیکی دیواره طبق رابطه (۱۳-۱۵) محاسبه می‌شود. ترکیب زاویه برخورد، با بردار نرمال نرمال سطح المان دور از دیواره، انحناى سطح را اندازه گیری کرده و این انحنا برای بالانس کردن ترم نیروی داخلی (نیروی بدنه) در محاسبات کشش سطح بکار می‌رود. زاویه برخورد  $\theta_w$  زاویه بین دیواره و مولفه مماسی مرز تقابل در دیواره (شکل ۲) می‌باشد.

$$\hat{n} = \hat{n}_w \cos \theta_w + \hat{t}_w \sin \theta_w \quad (26)$$



شکل-۲: اندازه زاویه برخورد.

### ۳-۶ چسبندگی پرش (Jump Adhesion)

در هنگام استفاده از مدل VOF گزینه‌ای برای تولید چسبندگی پرش متخلخل (Porous Jump Adhesion) همانند چسبندگی دیواره وجود دارد. در این قسمت زاویه برخورد برای هر طرف از مرز پرش متخلخل با فرض یکی بودن زاویه در هر طرف تعیین می‌گردد. بنابراین اگر  $\theta_w$  زاویه برخورد در پرش متخلخل باشد، آنگاه بردار نرمال سطح در المان مجاور به مرز پرش متخلخل (Porous Jump Boundary) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{n} = \hat{n}_w \cos \theta_w + \hat{t}_w \sin \theta_w \quad (27)$$

که  $\hat{n}_w$  و  $\hat{t}_w$  به ترتیب بردارهای یکه عمود و مماس بر مرز پرش متخلخل می‌باشد.

### گزینه رفتار چسبندگی دو-سویه مقید (Constrained Two-Sided Adhesion Treatment)

مدل رفتار چسبندگی دو-سویه مقید، قیدهایی را بر رفتار چسبندگی اعمال می‌کند. بنابراین رفتار زاویه برخورد تنها در سمتی(هایی) از پرش تخلخل که در مجاور نواحی سیال غیر متخلخل هست (هستند)، بکار می‌رود. در نتیجه رفتار زاویه پرش برای سمت‌هایی که مجاور یک ناحیه متخلخل هستند کاربرد ندارد. اگر گزینه رفتار چسبندگی دو سویه مقید بکار نرود، اثرات زاویه برخورد برای تمامی سمت‌های پرش متخلخل اعمال می‌شود.



## ۷ جریان کانال باز (Open Channel Flow)

در روش VOF می‌توان اثرات جریان کانال باز به (عنوان مثال رودخانه‌ها، سدها و جریان در اطراف سازه‌های شکافنده سطح جریان آزاد همانند پایه‌های پل‌ها و کشتی‌ها) را با بهره‌گیری از شرط مرزی کانال باز مدل‌سازی نمود. این نوع جریان‌ها در برگیرنده سطح آزاد بین یک سیال جاری مثل آب و سیال بالای آن (معمولا اتمسفر) می‌باشد. در چنین مسائلی انتشار امواج و رفتار سطح آزاد اهمیت پیدا می‌کند. معادلات حاکم بر این نوع جریان معمولا براساس نیروهای اینرسی و جاذبه استخراج می‌شود. این توانمندی عموماً برای تحلیل مسائل عمران آب، سازه‌های آبی، صنایع کشت‌سازی و موارد مشابه بسیار مناسب است. مشخصات جریان کانال باز براساس عدد بودن بعد فرود (Froude) که به صورت نسبت نیروهای اینرسی و هیدرواستاتیک (معادله ۲۸) تعریف می‌شود، بیان می‌گردد.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad (28)$$

که  $V$  اندازه سرعت سیال،  $g$  جاذبه و  $y$  طول مشخصه (Length Scale) که فاصله از کف کانال تا تراز سطح آزاد (Free Surface Level) می‌باشند. عبارت مخرج معادله (۲۸) مبین سرعت انتشار موج است. سرعت موج از دیدگاه یک ناظر ثابت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_w = V \pm \sqrt{gy} \quad (29)$$

براساس عدد فرود، جریان کانال باز می‌تواند به سه دسته تقسیم شود:

- موقعی که  $Fr < 1$  (یعنی  $V < \sqrt{gy}$ ) و بنابراین  $V_w < 0$  یا  $V_w > 0$  باشد، جریان به عنوان یک جریان زیربحرانی (Subcritical) قلمداد می‌شود و اغتشاشات از بالادست به سمت پایین دست و برعکس حرکت می‌کند. در چنین حالت‌هایی شرایط پایین دست ممکن است روی جریان بالادست تأثیر بگذارد.
- اگر  $Fr = 0$  ( $V_w = 0$ ) باشد آنگاه جریان بحرانی می‌شود که در این حالت امواج منتشر شونده ایستا (Stationary) باقی می‌مانند و مشخصه جریان تغییر می‌کند.

- هنگامیکه  $Fr > 1$  ( $V > \sqrt{gy}$  و بنابراین  $V_w > 0$ ) شود، یا یک جریان فوق بحرانی (Supercritical) روبه‌رو خواهیم شد. در این حالت اغتشاشات نمی‌تواند به بالادست انتقال یابد و شرایط پایین دست روی جریان بالادست تأثیری نخواهد داشت.

## ۷-۱ شرایط مرزی در بالادست (Upstream Boundary Conditions)

از دو نوع شرط مرزی می‌توان برای تعیین مشخصات جریان در بالادست جریان کانال باز استفاده نمود. شرط مرزی فشار ورودی (Pressure Inlet BC) و شرط مرزی دبی جرمی ورودی (Mass Flow Rate) دو مرز دردسترس در نرم افزار Fluent هستند.

### ۷-۱-۱ شرط مرزی فشار ورودی (Pressure Inlet)

فشار سکون یا توتال (Total Pressure)،  $P_0$ ، در ورودی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 + (\rho - \rho_0) |\vec{g}| (\hat{g} \cdot (\vec{b} - \vec{a})) \quad (30)$$

که  $\vec{b}$  بردار موقعیت از مرکز وجه و  $\vec{a}$  بردار موقعیت هر نقطه روی سطح آزاد می‌باشد. در اینجا سطح آزاد افقی و عمود بر جهت بردار جاذبه در نظر گرفته می‌شود.  $\vec{g}$  بردار جاذبه،  $|\vec{g}|$  اندازه جاذبه و  $\hat{g}$  بردار یکه جاذبه،  $V$  اندازه سرعت،  $\rho$  چگالی میانگین فازهای پر کننده المان و  $\rho_0$  چگالی مرجع می‌باشند. رابطه زیر نیز معرف فشار دینامیکی،  $q$ ، است.

$$q = \frac{\rho}{2} V^2 \quad (31)$$

و برای فشار استاتیک،  $P_s$  داریم:

$$p_s = (\rho - \rho_0) |\vec{g}| (\hat{g} \cdot (\vec{b} - \vec{a})) \quad (32)$$

که بصورت زیر می‌توان آن را بسط داد:

$$p_s = (\rho - \rho_0) |\vec{g}| \left( (\hat{g} \cdot \vec{b}) + y_{local} \right) \quad (33)$$

که  $y_{local}$  فاصله از نقطه مرجع تا سطح آزاد است.

$$y_{local} = -(\vec{a} \cdot \hat{g}) \quad (34)$$

### ۲-۱-۷ دبی جرمی (Mass Flow Rate)

دبی جرمی برای هر فاز موجود در ورودی جریان کانل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{m}_{phase} = \rho_{phase} (Area_{phase}) (Velocity) \quad (35)$$

### ۳-۱-۷ تعیین کسر حجمی

در جریان‌های کانال باز، نرم افزار *Fluent* با محاسبات داخلی خود، کسر حجمی را براساس پارامترهای تعیین شده توسط کاربر درکادر محاوره‌ای شرایط مرزی تعیین می‌کند. بنابراین این گزینه در جریان کانال باز غیر فعال می‌باشد.

- برای جریان‌های ورودی زیر بحرانی،  $Fr < 1$ ، نرم افزار *Fluent* مقدار کسر حجمی روی مرز را با استفاده از مقادیر المان‌های مجاور تصحیح می‌کند. این کار طی فرآیند زیر انجام می‌شود

○ محاسبه مقادیر کسر حجمی برای هر گره روی مرز با استفاده از مقادیر المان‌های مجاور

○ محاسبه کسر حجمی هر وجه با استفاده از میانگینی مقادیر محاسبه شده در گره‌ها

- برای جریان‌های ورودی فوق بحرانی،  $Fr > 1$ ، مقدار کسر حجمی روی مرز با استفاده از مقدار ثابت ارتفاع سطح آزاد نسبت به کف کانال محاسبه می‌شود.

### ۲-۷ شرایط مرزی پایین دست (Downstream Boundary Condition)

از شرایط مرزی فشار خروجی (*Pressure Outlet*) و جریان خروجی (*Outflow*) می‌توان به عنوان شرایط مرزی پایین دست (مرزهای خروجی جریان) برای حل میدان جریان کانال باز استفاده نمود.

## ۷-۲-۱ شرط مرزی فشار خروجی (Pressur-Outlet Boundary Condition)

اندازه گیری فشار استاتیک به روش محاسبه مشخصات فشار بستگی دارد. با استفاده از تراز سطح آزاد (*Free Surface Level*)، مقدار فشار استاتیک با استفاده از معادلات (۳۲) و (۳۴) دیکته می‌شود. در غیر اینصورت لازمست فشار نسبی استاتیک را تعریف نمود. برای جریان‌های خروجی زیر بحرانی ( $Fr < 1$ ) اگر تنها دو فاز وجود داشته باشد، آنگاه فشار با استفاده از پروفایل مشخص شده روی مرز تعیین می‌گردد. در غیر اینصورت فشار از سلول (المان) همسایه محاسبه می‌شود. برای جریان‌های فوق بحرانی، فشار همواره از المان مجاور به دست می‌آید.

## ۷-۲-۲ جریان خروجی (Outflow Boundary Condition)

شرایط مرزی جریان خروجی می‌تواند در خروجی جریان کانال باز برای مدلسازی جریان خارج شونده که جزئیات سرعت و فشار در مرز خروجی مشخص نیست، بکار رود. اگر شرایط در مرزهای خروجی مشخص نباشد، نرم افزار *Fluent* با استفاده از برونمایی اطلاعات مورد نیاز در مرز خروجی را با استفاده از اطلاعات داخل دامنه محاسباتی مشخص می‌کند. به هر صورت باید توجه داشت که استفاده از این شرط مرزی با محدودیت‌هایی همراه است که مهمترین آن‌ها عبارتند از:

- در استفاده از این شرط مرزی فرض بر اینست که جریان در جهت عمود بر مرز خروجی *Outflow* کاملاً توسعه یافته (*Fully Developed*) است. بنابراین باید در مدلسازی هندسی و سطوح مرزی دقت لازم را داشت.
- شرط مرزی جریان خروجی (*Outflow*) تنها با شرط مرزی دبی جریان جرمی ورودی (*Mass-Flow-Inlet*) سازگار بوده و قابل استفاده است. به عبارت دیگر از این مرز نمی‌توان همراه با شرط مرزی فشار ورودی (*Pressure-Inlet*) استفاده کرد. باید توجه داشت که این موضوع تنها برای جریان در کانال‌های باز صادق می‌باشد.
- لازمست میدان جریان اولیه (حدس اولیه) بگونه‌ای باشد تا از معضلات عدم همگرایی ناشی از بروز احتمالی جریان‌های بازگشتی در مرز جریان خروجی پرهیز شود چراکه دقت نتایج را غیر قابل اعتماد خواهد کرد.
- تنها از یک شرط مرزی جریان خروجی می‌توان در مرز خروجی جریان استفاده کرد. به عبارت دیگر نمی‌توان سطح خروج جریان را با چند شرط مرزی خروجی مشخص نمود حتی اگر همه شرایط مرزی از نوع *Outflow* باشد!

### ۷-۲-۳ مشخص نمودن کسر حجمی جریان پشت (Backflow Volume Fraction)

نرم افزار Fluent با محاسبات داخلی خود مقادیر کسر حجمی را با استفاده از مقادیر سلول‌های همسایه تعیین کرده و در نتیجه گزینه‌ای برای مشخص کردن کسر حجمی جریان پشت وجود ندارد.

### ۷-۳ میرایی امواج با استفاده از روش Numerical Beach Treatment (NBT)

در برخی کاربردهای خاص ممکن است از بین بردن انعکاس عددی حاصل از یک شرط مرزی برای جریان عبوری مطلوب و مد نظر باشد. برای پرهیز از انعکاس موج، یک ترم چاه (*Sink Term*) به معادله ممنتم برای المان‌های مجاور مرز خروجی (معادله ۳۶) اضافه می‌شود.

$$S = -[C_1 \rho V + \frac{1}{2} C_2 \rho |V|V] f(z) f(x) \quad (36)$$

که  $S$ : ترم چاه اضافه شده به معادله ممنتم در جهت  $\hat{x}$

$\hat{z}$ : جهت عمود در راستای جاذبه،

$\hat{x}$ : جهت جریان،

$C_1$ : مقاومت میرایی خطی ( $1/S$ ) با مقدار پیش فرض ۱۰،

$C_2$ : مقاومت میرایی درجه دوم ( $1/m$ ) با مقدار پیش فرض ۱۰،

$V$ : سرعت در در راستای  $\hat{x}$

$Z$ : فاصله از تراز سطح آزاد،

$X$ : فاصله در امتداد جهت جریان  $\hat{x}$ ،

$f(X)$ : تابع میرایی در جهت  $\hat{x}$  و

$f(z)$ : تابع میرایی در جهت  $\hat{z}$  می‌باشند.

فاکتور مقیاس گذاری (*Scaling Factor*) در جهات  $\hat{x}$  و  $\hat{z}$  به ترتیب طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$r_x = \frac{X - X_s}{X_e - X_s} \quad (37)$$

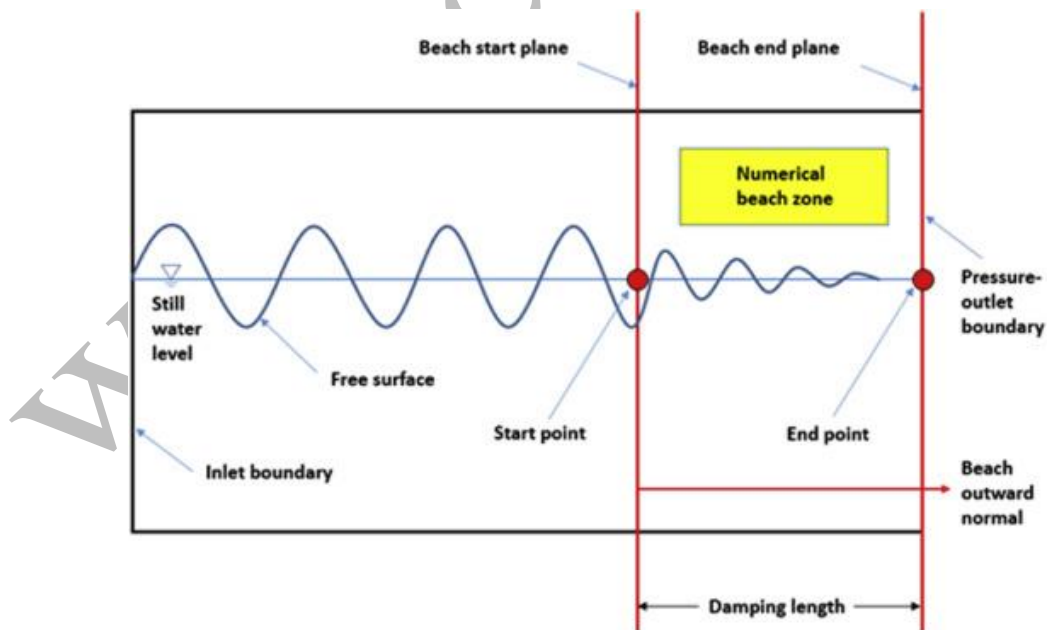
$$r_z = \frac{Z - Z_{fs}}{Z_b - Z_{fs}} \quad (38)$$

توابع میرایی نیز در جهات  $\hat{x}$  و  $\hat{z}$  نیز بصورت زیر می‌باشند:

$$f(x) = (r_x)^2 \quad (39)$$

$$f(z) = 1 - r_z \quad (40)$$

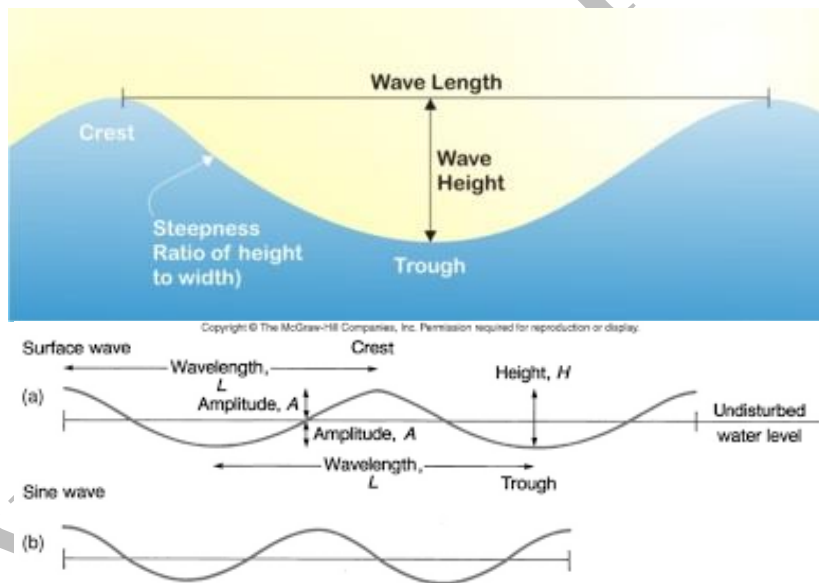
در معادله (۳۷)،  $X_e$  و  $X_s$  معرف نقاط شروع و پایان ناحیه میرایی در جهت  $X$  هستند (شکل-۳). در معادله (۳۸) و  $Z_b$  و  $Z_{fs}$  نیز مبین تراز سطح آزاد و کف بستر در امتداد جهت  $\hat{z}$  می‌باشند. نرم افزار *Fluent* از میرایی خطی در جهت  $\hat{z}$  و میرایی درجه دوم در جهت  $\hat{x}$  استفاده می‌کند.



شکل-۳: شماتیک هندسی میرایی امواج.

## ۸ شرایط مرزی موج کانال باز ( Open Channel Wave Boundary ) (Condition)

شرط مرزی موج کانال باز امکان شبیه‌سازی امواج روی سطح آزاد جریان را در کانل‌های باز (رودخانه، سد، دریا، اقیانوس و ...) فراهم می‌سازد. این امواج می‌تواند منظم یا نامنظم باشد. قابلیت یاد شده برای صنایع کشتی‌سازی، سازه‌های دریایی و غیره در مسائلی که تحلیل سینماتیک و امواج ضربه‌ای موج برخورد کننده به سازه‌های آبی، بدنه کشتی‌ها و موارد دیگر اهمیت دارد، بسیار مفید است. تئوری‌های موج دامنه کوچک (Small Amplitude Wave Theories) برای امواج با شیب‌ها (Steepness) و همچنین ارتفاعات نسبی (Relative Height) کوچک بکار می‌رود. در حالیکه تئوری‌های موج دامنه محدود (Finite Amplitude Wave Theories) بیشتر برای شیب‌ها و ارتفاعات نسبی افزایشی مناسب هستند. شیب موج عموماً بصورت نسبت ارتفاع موج به طول موج و ارتفاع نسبی نیز بصورت نسبت ارتفاع موج به عمق مایع تعریف می‌شود (شکل-۴)

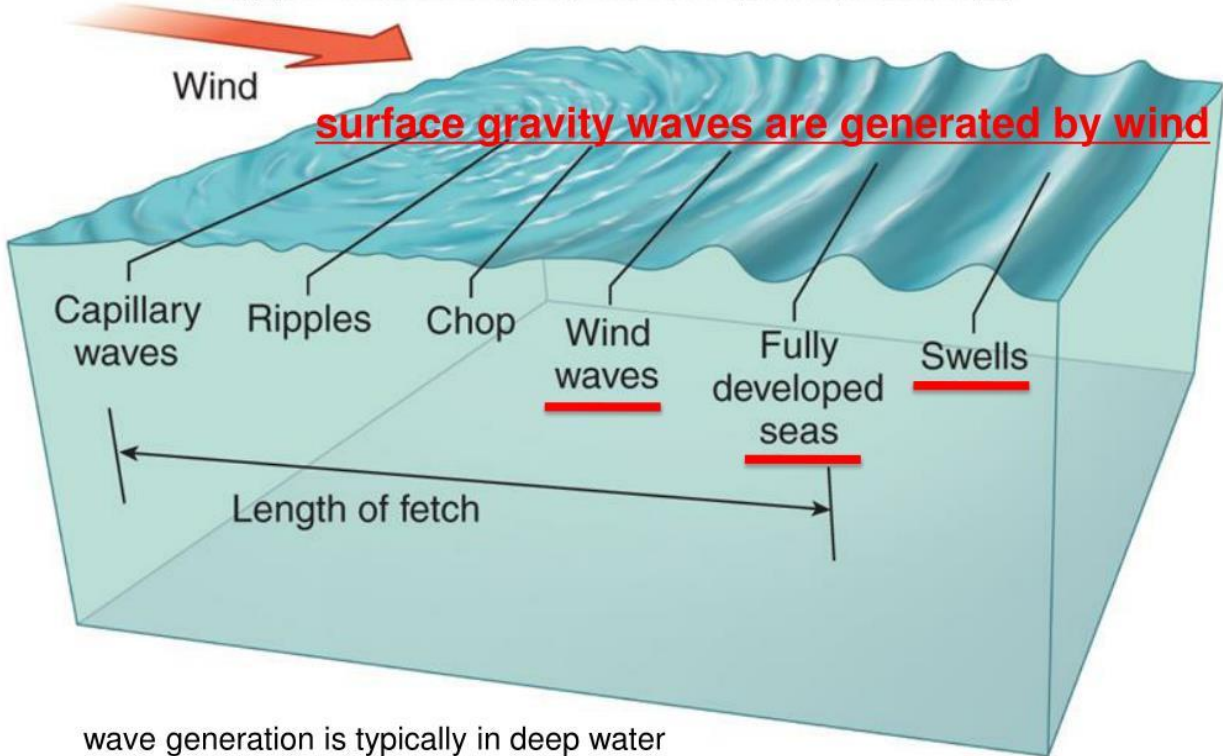


شکل-۴ شماتیک پارامترهای هندسی امواج

تقریباً تمامی امواج تولید شده در سطح جریان آزاد ناشی از وزش باد می‌باشند (به جز مواردی نظیر انفجار، سونامی و ...) شماتیک تولید امواج حاصل از وزش باد در شکل (۵) نشان داده شده است. قصد بر اینست که انواع روش‌های مدلسازی موج‌ها در این قسمت توضیح داده شود.

## wave development and evolution

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



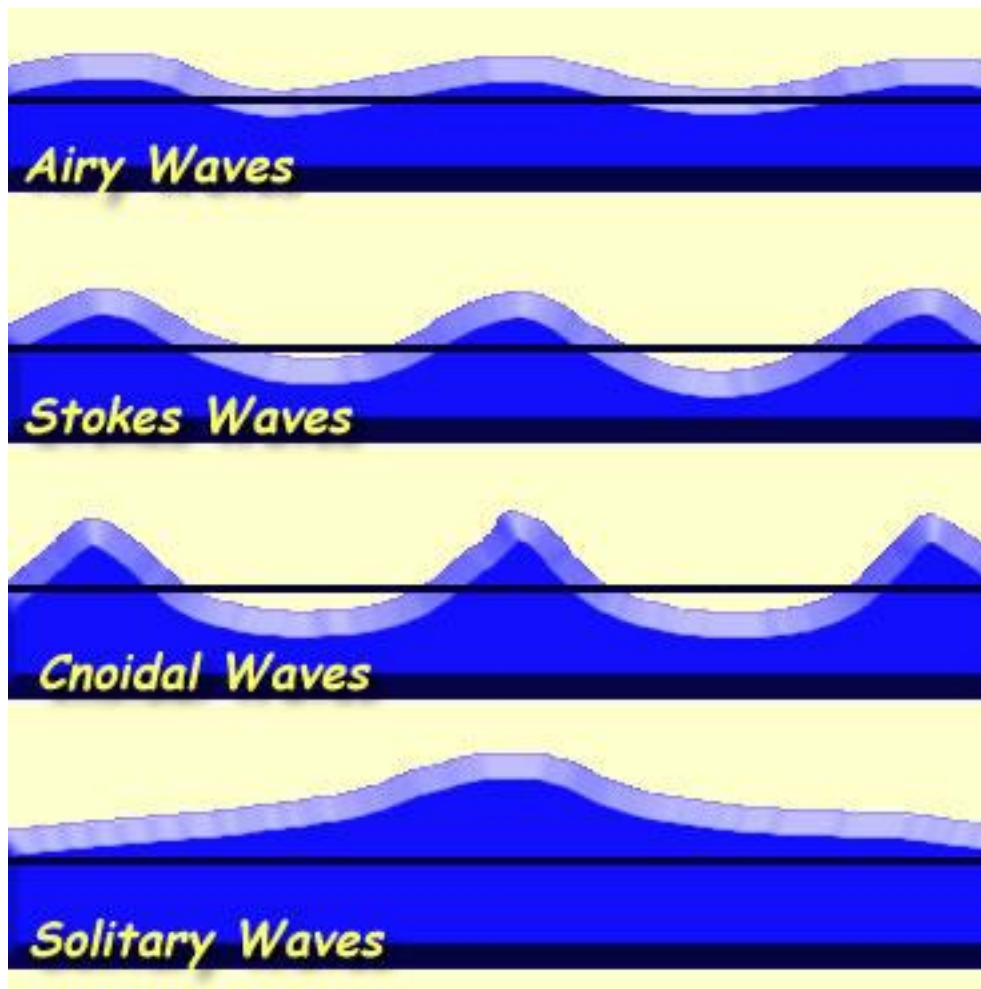
wave generation is typically in deep water

شکل-۵: شماتیک تولید، توسعه و تکامل موج ناشی از وزش باد.

در نرم افزار *Fluent* گزینه‌های متعددی برای امواج گرانش سطحی (*Surface Gravity Waves*) ناشی از شرایط مرزی سرعت ورودی (*Velocity Inlet Boundary Condition*) نشان داده شده در نظر گرفته شده است که عبارتند از:

- تئوری موج هوایی مرتبه اول (**First Order Airy Wave**): برای امواج دامنه کوچک در گستره عمق کم تا عمیق کاربرد داشته و خطی می‌باشد (شکل-۶).
- تئوری موج استوکس مرتبه بالاتر (**Higher Order Stokes Wave**): برای امواج دامنه محدود در اعماق متوسط تا ژرف استفاده شده و غیر خطی است (شکل-۶).
- تئوری امواج سنویدال/سولیتاری مرتبه بالاتر (**Higher Order Cnoidal/Solitary wave**): برای امواج دامنه محدود در اعماق کم عمق تا عمیق بکار گرفته شده و غیر خطی می‌باشد (شکل-۶).
- برهم نهی امواج خطی (**Superposition of Linear Waves**): برای تولید پدیده‌های فیزیکی متغیر نظیر تداخل (*Interface*)، امواج بتا (*Beta Waves*)، امواج ایستاده (*Standing Waves*) و امواج نامنظم استفاده می‌شود.
- طیف‌های موج قله دار بلند/کوتاه (**Long/Short-crested Wave Spectrums**): برای مدلسازی امواج تصادفی در اعماق متوسط تا عمیق و براساس تابع توزیع انرژی موج استفاده می‌شود.





شکل-۶: شماتیکی از انواع امواج در تئوری‌های مختلف تولید موج.

اصطلاح موج گرانش کوتاه (Short Gravity Wave) برای هر تئوری موج براساس ارتفاع نامحدود مایع بیان می‌شود. در حالیکه عبارت موج کم عمق (Shallow) یا متوسط (Intermediate) برای ارتفاع محدود مایع بکار می‌رود. بطور کلی ارتفاع موج بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = 2A = A_t + A_c \quad (41)$$

که  $A$  دامنه موج،  $A_t$  دامنه موج در کف یا حوض (Trough) و  $A_c$  دامنه موج در اوج (Crest) می‌باشد (شکل-۴). برای تئوری موج خطی  $A_t = A_c$  و برای تئوری موج غیر خطی  $A_t \neq A_c$  است. عدد موج  $k$  طبق رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (42)$$

در رابطه بالا،  $\lambda$  طول موج است. بردار عدد موج نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{K} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} \quad (43)$$

$\hat{x}$  جهت انتشار موج مرجع،  $\hat{z}$  جهت مخالف جاذبه و  $\hat{y}$  جهت نرمال بر  $\hat{x}$  و  $\hat{z}$  می‌باشند. اعداد موج در جهات  $\hat{x}$  و  $\hat{y}$  با استفاده از معادلات (44) و (45) محاسبه می‌شود.

$$k_x = k \cos \theta \quad (44)$$

$$k_y = k \sin \theta \quad (45)$$

$\theta$ : زاویه برخورد موج (Wave Heading Angle) بوده و بصورت زاویه بین جبهه موج و جهت انتشار موج مرجع در صفحات  $\hat{x}$  و  $\hat{y}$  تعریف می‌شود. فرکانس موج مؤثر،  $\omega_e$ ، نیز طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\omega_e = \omega + \vec{K} \cdot \vec{U} \quad (46)$$

که  $\omega$  فرکانس موج و  $\vec{U}$  سرعت متوسط جریان سیال می‌باشد. در زمانیکه مشخصات جریان نسبت به جسم متحرک بیان می‌شود، اثرات آن جسم نیز می‌تواند در جریان سیال گنجانده شود. سرعت موج (Celerity) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (47)$$

بردار سرعت نهایی برای موج‌های وارد شوند،  $\vec{V}$ ، با برهم نهی تمام مؤلفه‌های سرعت و براساس معادله (48) تعیین می‌گردد:

$$\vec{V} = \vec{U} + u \hat{x} + v \hat{y} + w \hat{z} \quad (48)$$

که  $u$ ،  $v$  و  $w$  مؤلفه‌های سرعت موج گرانش سطح در جهات  $\hat{x}$ ،  $\hat{y}$  و  $\hat{z}$  می‌باشند. متغیر  $\alpha$  برای تمامی تئوری‌های موج اینگونه تعریف می‌شود:

$$\alpha = k_x x + k_y y - \omega_e t + \varepsilon \quad (49)$$

متغیرهای  $x$  و  $y$  مولفه‌های مکانی در جهات  $\hat{x}$  و  $\hat{y}$ ،  $\varepsilon$  اختلاف فاز و  $t$  مبین زمان می‌باشد.

## ۸-۱ تئوری موج هوایی (Airy Wave Theory)

در این تئوری پروفیل موج برای یک موج خطی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\zeta(X, t) = A \cos \alpha \quad (50)$$

که  $\alpha$  از رابطه (۴۹) محاسبه می‌شود. معادله (۵۱) بیانگر فرکانس موج،  $\omega$ ، برای موج‌های کم عمق/متوسط می‌باشد.

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} \quad (51)$$

و برای امواج گرانش کوتاه داریم:

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (52)$$

که  $h$  ارتفاع سیال،  $k$  عدد موج و  $g$  مقدار گرانش است. مؤلفه‌های سرعت برای شرایط مرزی موج برگشتی می‌تواند از دیدگاه امواج کم عمق/متوسط (معادلات ۵۳ و ۵۴) و یا امواج گرانش کوتاه (معادلات ۵۵ و ۵۶) بیان شود.

مؤلفه‌های سرعت برای امواج کم عمق/متوسط

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{gkA}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cos \alpha \quad (53)$$

$$w = \frac{gkA}{\omega} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin \alpha \quad (54)$$

مؤلفه‌های سرعت برای امواج گرانش کوتاه

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{gkA}{\omega} e^{kz} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cos \alpha \quad (55)$$

$$w = \frac{gkA}{\omega} e^{kz} \sin \alpha \quad (56)$$

$Z$  ارتفاع از تراز سطح آزاد در جهت  $\hat{z}$  که مخالف جهت جاذبه نیز هست، می‌باشد.

## ۸-۲ تئوری‌های موج استوکس (Stokes Wave)

در نرم افزار Fluent تئوری‌های موج استوکس براساس تحقیق جان دی. فنتن (Joun D. Fenton) بنا شده‌اند. این تئوری امواج برای امواج دامنه محدود با شیب بالا در گستره کم عمق تا عمیق عمق مایعات صادق می‌باشد. توصیف عمومی پروفایل موج برای تئوری‌های استوکس مرتبه بالاتر (مرتبه دوم تا پنجم) بصورت زیر می‌باشد:

$$\zeta(X,t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i b_{ij} \xi^i \cos(j\alpha) \quad (57)$$

همچنین فرم کلی پتانسیل سرعت در این تئوری در قالب معادله (۵۸) بیان می‌شود.

$$\Phi(X,t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^i a_{ij} \cosh(jk(z+h)) \cos(j\alpha) \quad (58)$$

$$\xi = \frac{kH}{2} \quad (59)$$

$\xi$  معرف شیب موج و  $n$  بیانگر مرتبه موج (از ۲ تا ۵) هستند. سرعت موج،  $C$ ، نیز طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} (1 + c_3 \xi^2 + c_5 \xi^4) \quad (60)$$

برای استوکس مرتبه دوم  $C_3 = C_5 = 0$  (که در این حالت استوکس بصورت تئوری موج خطی مرتبه اول تبدیل می‌گردد) و برای استوکس مرتبه سوم و چهارم  $C_5 = 0$  در نظر گرفته می‌شود. فرکانس موج،  $\omega$ ، در این تئوری، بصورت زیر است:

$$\omega = kc \quad (61)$$

مؤلفه‌های سرعت برای موج گرانش سطحی از تابع پتانسیل اقتباس می‌شود:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \theta \quad (62)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \theta \quad (63)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

### ۳-۸ تئوری امواج سنویدال/سولیتاری (Cnoidal/Solitary wave)

نرم افزار Fluent از فرمولاسیون تئوری موج‌های سنویدال/سولیتاری مبتنی بر توابع بیضوی و ژاکوبین‌های مختلط برگرفته از تحقیقات جان دی. فنتن (John D. Fenton) استفاده می‌کند. حل سنویدال بیانگر یک حوضی (Trough) پهن و صاف و یک اوج (Crest) باریک از امواج واقعی در آب‌های کم عمق و همانند شکل (۶) می‌باشد. در محدوده طول موج‌های بی‌نهایت تئوری سنویدال نشانگر یک موج تنها (Solitary Wave) همچون یک موج با برآمدگی گرد و بدون هیچ نوع حوضی می‌باشد.



شکل-۷: تصویری زیبا از یک موج تنها (Solitary).

بخاطر پیچیدگی تئوری موج سنویدال، تئوری موج تنها (Solitary) کاربرد بیشتری در حل رژیم جریان‌های کم عمق دارد. لازم به توضیح است برای سادگی از بیان جزئیات عددی ترم‌های مرتبه بالاتر خود داری شده است.

در این تئوری‌ها پارامتر تابع بیضوی،  $m$ ، با حل معادله غیر خطی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\lambda}{h} = 4K(m) \sqrt{\frac{3H}{h}} [1 + \text{Higher-order terms}] \quad (65)$$

ارتفاع حوضی از کف مایع (کف کانال، کف دریا و ...)،  $h_{tr}$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{h_{tr}}{h} = 1 - \frac{H}{h} \frac{E(m)}{K(m)} + \text{Higher-order terms} \quad (66)$$

عدد موج،  $k$ ، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{1}{h_{tr}} \sqrt{\frac{3H}{4h_{tr}}} [1 + \text{Higher-order-terms}] \quad (67)$$

سرعت موج،  $c$ ، طبق معادله (۶۸) محاسبه می‌شود:

$$c = \sqrt{gh_{tr}} \left( 1 + \frac{H}{h} \left[ \frac{1}{2} - \frac{E(m)}{K(m)} \right] + \text{Higher-order-terms} \right) \quad (68)$$

برای فرکانس موج،  $\omega$ ، داریم:

$$\omega = kc \quad (69)$$

پروفیل موج برای موج کم عمق اینگونه محاسبه می‌شود:

$$\zeta(X, t) = -h + h_{tr} \left[ 1 + \frac{H}{h_{tr}} cn^2(\alpha, m) + \text{Higher-order-terms} \right] \quad (70)$$

و برای  $\alpha$  نیز رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha = k_x(x - x_0) + k_y y - \omega_e t \quad (71)$$

که  $x_0$  فاصله انتقالی از مبدا مختصات مرجع در جهت  $\hat{x}$  می‌باشد. مؤلفه‌های سرعت برای تئوری موج مرتبه پنجم بصورت زیر بیان می‌شود:

$$u = \left[ c - \sqrt{gh_{tr}} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^5 \left( \frac{4(kh_{tr})^2}{3} \right)^i \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{z+h}{h_{tr}} \right)^{2j} \sum_{l=0}^i cn^{2l}(\alpha, m) C_{ijl} \right\} \right] \cos(\theta) \quad (72)$$

$$v = \left[ c - \sqrt{gh_{tr}} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^5 \left( \frac{4(kh_{tr})^2}{3} \right)^i \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{z+h}{h_{tr}} \right)^{2j} \sum_{l=0}^i cn^{2l}(\alpha, m) C_{ijl} \right\} \right] \sin(\theta) \quad (72)$$

$$w = \sqrt{gh_{tr}} 2kh_{tr} cn(\alpha, m) sn(\alpha, m) dn(\alpha, m) \left[ \sum_{i=1}^5 \left( \frac{4(kh_{tr})^2}{3} \right)^i \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{z+h}{h_{tr}} \right)^{2j+1} \sum_{l=1}^i cn^{2(l-1)}(\alpha, m) \frac{1}{2j+1} C_{ijl} \right] \quad (73)$$

که  $C_{ijl}$  ضرایب عددی ارجاع شده در مرجع [۱] می‌باشد.

اصطلاح تئوری موج تنها با فرض اینکه امواج دارای طول موج بی‌نهایت می‌باشند، بیان شده و در این حالت  $m=1$  و  $h_{tr} = h$  می‌باشد.

## ۴-۸ انتخاب تئوری موج مناسب

انتخاب تئوری‌های موج خطی و غیر خطی برای امواج کم عمق براساس عدد اورسل (Ursell) انجام می‌شود. برای امواج غیر خطی، معیار عدد اورسل به این مفهوم است که موج یک موج تک اوجی (Single-Crested) و بدن تولید هیچ گونه برآمدگی (اوج) ثانویه‌ای در حوض می‌باشد. تئوری‌های موج باید طبق شیب موج و ارتفاع نسبی انتخاب شوند چراکه امواج با افزایش شیب یا ارتفاع نسبی الگویی غیر خطی پیدا می‌کنند. تئوری‌های موج مرتبه دوم و چهارم بیشتر تمایل به تولید برآمدگی (اوج) ثانویه دارند. انتخاب تئوری موج مناسب برای یک کاربرد خاص به پارامترهای ورودی همراه با شکست موج و حد پایداری آن دارد که در ادامه توضیح داده می‌شوند.

### • بررسی الزامی برای رژیم موج کامل در محدوده شکست موج

نسبت ارتفاع موج به عمق مایع  $H/h$  (ارتفاع نسبی) در محدوده شکست موج بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[ \frac{H}{h} \right]_{\max, \text{theoretical}} = 0.78 \quad (75)$$

$$\left[ \frac{H}{h} \right]_{\max, \text{Numerical}} = 0.55 \quad (76)$$

نسبت ارتفاع موج به طول موج  $H/\lambda$  (شیب موج) در محدوده شکست موج بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[ \frac{H}{\lambda} \right]_{\max, \text{theoretical}} = 0.142 \quad (77)$$

$$\left[ \frac{H}{\lambda} \right]_{\max, \text{Numerical}} = 0.12 \quad (78)$$

### • بررسی تئوری‌های موج در محدوده پایداری و شکست موج:

در این بررسی، نوع موج براساس تئوری موج مناسب بصورت زیر مشخص می‌شود:

○ موج خطی؛ تئوری موج همایی

○ موج استوکس؛ تئوری موج مرتبه پنجم

○ موج کم عمق؛ تئوری موج سنویدال/سولیتاری مرتبه پنجم

بررسی تئوری‌های موج بین مرتبه‌های ۲ تا ۵ بین موج استوکس خطی تا مرتبه پنجم انجام می‌شود.

○ بررسی رژیم موج

نسبت ارتفاع مایع به طول موج  $h/\lambda$  برای امواج مختلف بصورت زیر است:

امواج گرانش کوتاه:

$$\left[\frac{h}{\lambda}\right]_{\min} = 0.5 \quad (79)$$

امواج استوکس:

$$\left[\frac{h}{\lambda}\right]_{\min} = 0.06 \quad (80)$$

امواج کم عمق:

$$\left[\frac{h}{\lambda}\right]_{\max} = 0.085 \quad (81)$$

○ بررسی شیب موج

نسبت ارتفاع موج به طول موج  $H/\lambda$  برای موج خطی از قرار زیر است:

$$\left[\frac{H}{\lambda}\right]_{\max} = 0.02 \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \quad (82)$$

برای امواج استوکس این نسبت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[\frac{H}{\lambda}\right]_{\max} = 0.142 \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \quad (83)$$

باید توجه داشت اواج استوکس عموماً برای شیب موج زیر ۰٫۱ پایدار هستند. این امواج ممکن است در دامنه شیب موج ۰٫۱ تا

۰٫۱۲ پایدار یا ناپایدار باشند اما برای شیب‌های بزرگتر از ۰٫۱۲، اغلب شاهد شکستن آن‌ها هستیم.



برای امواج کم عمق نسبت یاد شده اینگونه تعریف می‌شود:

$$\left[\frac{H}{\lambda}\right]_{\max} = 0.142 \left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \quad (۸۴)$$

#### ○ بررسی ارتفاع نسبی

نسبت ارتفاع موج به عمق مایع  $H/h$  برای موج خطی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[\frac{H}{h}\right]_{\max} = 0.1 \quad (۸۵)$$

برای موج استوکس در رژیم جریان‌های کم عمق داریم:

$$\left[\frac{H}{h}\right]_{\max} = 0.5 \quad (۸۶)$$

باید توجه داشت امواج استوکس معمولا برای نسبت ارتفاعات کمتر از ۰,۴ پایدار بوده و اگر این مقدار بیشتر از ۰,۴ باشد آنگاه امواج مذکور معمولا دست خوش ناپایداری و شکست می‌شوند.

برای امواج کم عمق نسبت یاد شده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\left[\frac{H}{h}\right]_{\max} = 0.55 \quad (۸۷)$$

#### ○ معیار پایداری عدد اورسل

عدد اورسل طبق معادله زیر تعریف می‌شود:

$$Ur = \frac{H\lambda^2}{h^3} \quad (۸۸)$$

معیار پایداری عدد اورسل برای یک موج خطی عبارتست از:

$$(Ur)_{\max} = \frac{32\pi^2}{3} \quad (۸۹)$$

برای امواج استوکس در رژیم‌های کم عمق پایداری عدد اورسل بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(Ur)_{\max} = \frac{8\pi^2}{3} \quad (90)$$

معمولا امواج استوکس برای مقادیر  $Ur < 10$  پایدار هستند. دامنه  $10 < Ur < 25$  بیانگر انتقال به رژیم کم عمق می‌باشد، لذا موج استوکس ممکن است ناپایدار شود. امواج استوکس برای رژیم‌های جریان در اعماق متوسط تا ژرف کاربردی تر هستند.

معیار عدد اورسل برای امواج کم عمق بصورت زیر می‌باشد:

$$(Ur)_{\min} = \frac{8\pi^2}{3} \quad (91)$$

### ۵-۸ برهم نهی امواج خطی (Superposition of Linear Waves)

راهکار برهم نهی امواج را می‌توان در زمانیکه دو یا چند موج همزمان از یک منطق عبور می‌کنند استفاده نمود. در این روش الگوی موج نهایی با جمع پروفایل‌های امواج و پتانسیل سرعت تک تک موج‌ها بدست می‌آید. بسته به طبیعت برهم نهی بروز پدیده‌های زیر امکان پذیر است:

۱- **تداخل (Interface):** مجموعی از امواج عبوری با ارتفاع و فرکانس یکسان در یک جهت مشابه می‌باشد. تداخل سازنده (Constructive Interface) در حالتی اتفاق می‌افتد که امواج عبوری هم فاز باشند. اما تداخل مخرب (Destructive Interface) زمانی که امواج عبوری غیر هم فاز باشند رخ می‌دهد.

۲- **گروه موج/ضربان (Beats/Wave Group):** ناشی از برهم نهی امواج هم ارتفاع عبوری در جهت مشابه و با فرکانس‌های نزدیک به هم می‌باشد و ضربان‌ها از طریق کاهش/افزایش فرکانس حاصل از امواج نسبت زمان می‌باشد. در کاربردهای دریایی، این مفهوم برهم نهی موج تحت عنوان گروه موج شناخته می‌شود. در یک گروه موج، پاکت (گروه) موج‌ها با یک سرعت گروهی که کمتر از سرعت فازی هر موج منفرد می‌باشد، حرکت می‌کنند.

۳- **امواج ایستا (Stationary/Standing Waves):** ترکیب امواج یکسان در جهات مخالف می‌باشد. این برهم نهی یک موج ایستا را شکل می‌دهد که هر بخش یک حرکت هارمونیک ساده با یک فرکانس مشابه اما دامنه متفاوت را انجام می‌دهد.

۴- **امواج نامنظم (Irregular Waves):** تجمیع امواج با ارتفاعات، فرکانس‌ها، اختلاف فازها و جهت‌های انتشار متفاوت می‌باشد. امواج دریایی نامنظم نمونه بارزی از این پدیده بوده و می‌تواند با افزودن چندین موج مدلسازی شود.

\*\*\* باید توجه داشت که اصل بر هم نپهی تنها برای امواج با دامنه‌های کوچک یا خطی صادق است. استفاده از برهم نپهی برای امواج دامنه محدود بخاطر رفتار غیر خطی و وابستگی آن‌ها به پراکندگی ی‌موج در ارتفاع اوج، ممکن است پاسخ‌های غیر دقیق و حتی نادرست را به دنبال داشته باشد.

## ۸-۶ مدل‌سازی امواج تصادفی با استفاده از طیف موج ( Modeling of Random Waves Using Wave Spectrum )

موج‌های تصادفی روی سطح دریا بواسطه تأثیر باد روی سطح آزاد بوجود می‌آیند (شکل-۵). سرعت وزش باد بیشتر، مدت وزش باد طولانی‌تر و فاصله سطحی که باد روی آن وزیده می‌شود (fetch) امواج بزرگتری را نتیجه می‌دهند (شکل-۵). امکان شبیه‌سازی موج تصادفی برای شرایط مرزی کانال باز با تعیین یک طیف (Spectrum) موج که بیانگر توزیع انرژی روی پهنای فرکانس موج می‌باشد، وجود دارد. چندین رابطه برای بیان طیف موج براساس سرعت، جهت، زمان سطح وزش باد (Fetch) وجود دارد که در ادامه معرفی می‌شوند.

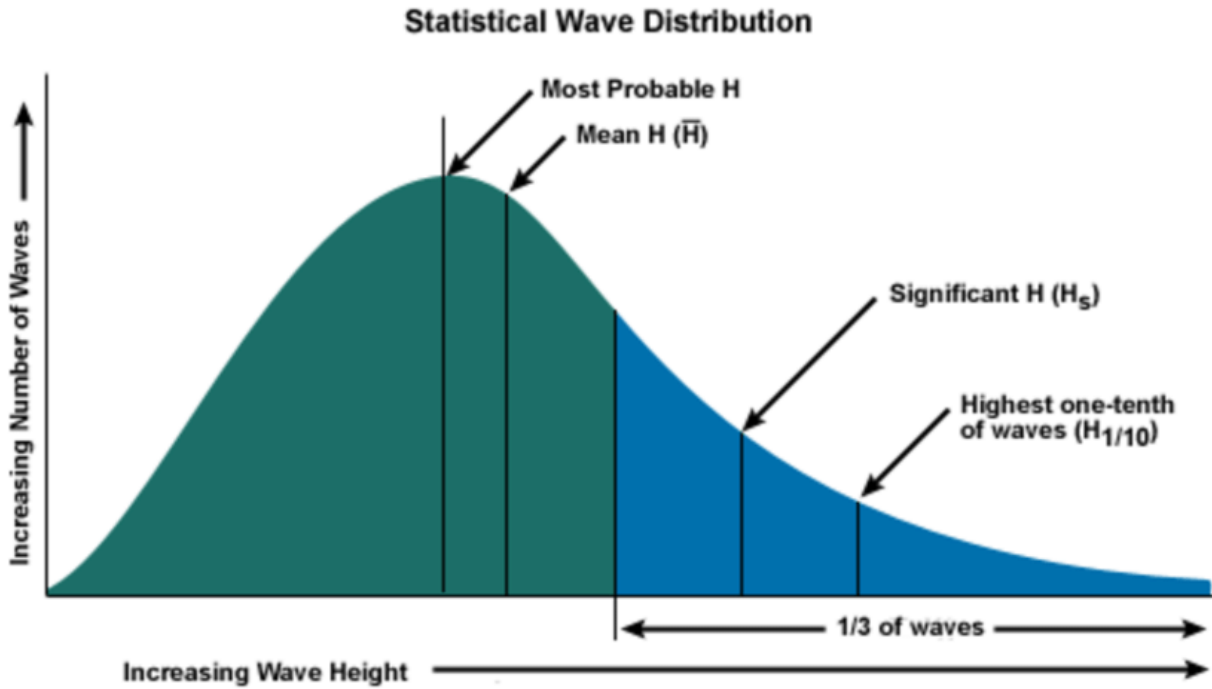
### ۸-۶-۱ تعاریف

#### دریای کاملاً توسعه یافته (Fully Developed Sea)

وقتی که باد وزنده روی سطح دریا، بیشترین انرژی خود را به امواج می‌دهند، آنگاه گفته می‌شود که دریا کاملاً توسعه یافته است. به عبارت دیگر وضعیت دریا مستقل از فاصله سطح وزش باد (Fetch) و مدت زمان آن است (شکل-۵). در این حالت فرض بر اینست که ارتفاع سطح دریا (Sea Elevation) از لحاظ استاتیکی پایدار است. وضعیت دریا عموماً با استفاده از پارامترهای زیر که سرعت باد و سطح تحت وزش باد (Fetch) تخمین زده می‌شود، مشخص می‌گردد.

الف: ارتفاع موج مبنا،  $H_s$  (Significant Wave Height)

ارتفاع میانگین موج از  $1/3$  بزرگترین موج محتمل (شکل-۸)



شکل-۸: پارامترهای هندسی توزیع استاتیک موج.

ب: فرکانس موج پیک،  $\omega_p$  یا پریود

فرکانس یا پریود متناظر با انرژی مرتفع‌ترین موج

### دریای موج دراز (Long-Crested Sea)

اگر بی‌نظمی موج‌های مشاهده شده تنها در جهت باد غالب باشند، این امواج اساساً در یک جهت با دامنه‌های متفاوت اما موازی با

یکدیگر رمی‌باشند که به دریای موج دراز (Long-Crested Sea) معروف هستند (شکل-۹).



شکل-۹: تصویری زیبا از دریای موج دراز.

### دریای موج کوتاه (Short-Crested Sea)

زمانیکه در امتداد برآدگی موج‌ها در چندین جهت بی‌نظمی ظاهر شود، دریا به عنوان دریای موج کوتاه (Short-Crested Sea) شناخته می‌شود (شکل-۱۰).



شکل-۱۰ مقایسه بین دریا در دو حالت موج کوتاه و موج بلند.

## ۸-۶-۲ تئوری پیاده سازی طیف موج

### ۸-۶-۲-۱ امواج دراز تصادفی تک راستا (Long-Crested Random Waves (Unidirectional))

در این حالت طیف‌های موج‌های دراز تصادفی تک راستا بوده و تنها تابعی از فرکانس می‌باشند. سه فرمولاسیون مختلف برای کمی کردن این امواج وجود دارد که در ادامه مورد بررسی قرار گرفته است.

#### طیف پیرسون-مسکوویتز (Pierson-Moskowitz spectrum)

طیف پیرسون-مسکوویتز تنها برای دریای کاملاً توسعه یافته صحیح بوده و فرض می‌کند که امواج بصورت متعادل و همراه با باد وزنده به سطح (Fetch) نامحدود می‌باشد.

$$S_{PM}(\omega) = \frac{5}{16} \frac{H_s^2 \omega_p^4}{\omega^5} e^{-\left(\frac{5\omega_p^4}{4\omega^4}\right)} \quad (92)$$

که  $\omega$  فرکانس موج،  $\omega_p$  فرکانس موج پیک و  $H_s$  ارتفاع موج مبنا می‌باشد.

#### طیف موج جونزوپ (Jounswap Spectrum)

طیف جونزوپ نسخه سطح Fetch محدود طیف پیرسون-مسکوویتز می‌باشد که در آن فرض می‌شود که طیف موج آنقدر ادامه می‌یابد تا به اندرکنش (Interaction) موج-موج غیر خطی در زمان و مسافت بسیار طولانی برسد. قله (پیک) در این طیف موج نسبت به طیف موج پیرسون-مسکوویتز چشمگیرتر است.

$$S_{JS}(\omega) = S_{PM}(\omega) A_{\gamma} \gamma^{\wedge} \exp\left(-0.5 \left(\frac{\omega - \omega_p}{\sigma \omega_p}\right)^2\right) \quad (93)$$

که  $S_{PM}(\omega)$ : طیف پیرسون-مسکوویتز،

$\omega$ : فرکانس موج،

$\omega_p$ : فرکانس موج پیک (Peak Wave)،

$\gamma$ : پارامتر شکل پیک،

$$A_\gamma = 1 - 0.287 \ln(\gamma) \text{ و}$$

$\sigma$ : پارامتر پهنای طیفی می‌باشند.

$$\sigma = 0.07 \quad \omega \leq \omega_p$$

$$\sigma = 0.09 \quad \omega > \omega_p$$

**طیف TMA**

طیف TMA مدل تصحیح شده طیف جونزوپ می‌باشد که برای عمق آب محدود کاربرد دارد.

$$S_{TMA}(\omega) = S_{JS}(\omega) \phi(\omega, h) \quad (94)$$

تابع عمق  $\phi(\omega, h)$  بشکل رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\phi(\omega, h) = \frac{(\cosh(kh))^2}{(\sinh(kh))^2 + \frac{\omega^2 h}{g}} \quad (95)$$

و  $k$  نیز عدد موج محاسبه شده از رابطه پراکندگی می‌باشد.

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

که  $g$  مقدار جاذبه و  $h$  عمق مایع است.

## Short-Crested Random Waves (Multi-Directional) ۸-۶-۲-۲ امواج تصادفی کوتاه چند راستا

امواج تصادفی کوتاه چندین جهته بوده و تابعی از فرکانس و جهت هستند. فرم کلی مدل یاد شده بصورت زیر است:

$$S(\omega, \theta) = S(\omega)G(\theta, \omega)$$

$S(\omega)$ : طیف فرکانسی و  $G(\theta, \omega)$  تابع پراکندگی جهتی هستند. در این مدل تابع زیر باید ارضا شود:

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} S(\omega, \theta) d\theta = S(\omega)$$

که تحت شرایط زیر به تابع پراکندگی اعمال می‌شود:

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} G(\theta, \omega) d\theta = 1$$

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \theta_p - \theta_s \\ \theta_{\max} &= \theta_p + \theta_s \end{aligned} \quad 0 \leq \theta_s \leq \pi$$

$\theta_p$ : زاویه برخورد موج اصلی (میانگین) (Principal (Mean) Wave)

$\theta_s$ : انتشار زاویه‌ای از  $\theta_p$ .

در نرم افزار Fluent دو گزینه با عناوین تابع توانی Cosine- $2s$  و تابع هذلولوی برای تعیین تابع پراکندگی جهتی،  $G(\theta, \omega)$  پیشنهاد شده است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

### تابع توانی Cosine- $2s$ (مستقل از فرکانس)

در فرمولاسیون تابع توانی Cosine- $2s$ ، تابع انتشار جهتی  $G(\theta, \omega)$  مستقل از فرکانس بوده و از طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$G(\theta, \omega) \approx G(\theta) = G(s) \cos^{2s} \left( \frac{\pi}{2\theta_s} (\theta - \theta_p) \right) \quad (۹۷)$$

$$|\theta - \theta_p| \leq \theta_s \quad 0 \leq \theta_s \leq \pi$$

$$G(s) = \left[ \int_{-\theta_s}^{\theta_s} \cos^{2s} \left( \frac{\pi}{2\theta_s} \theta \right) d\theta \right]^{-1}$$



S عدد صحیح بین ۱ و n می‌باشد.

### تابع هذلولوی وابسته به فرکانس

در فرمولاسیون تابع هذلولوی، تابع انتشار جهتی  $G(\theta, \omega)$  مستقل از فرکانس بوده و از طریق زیر محاسبه می‌شود:

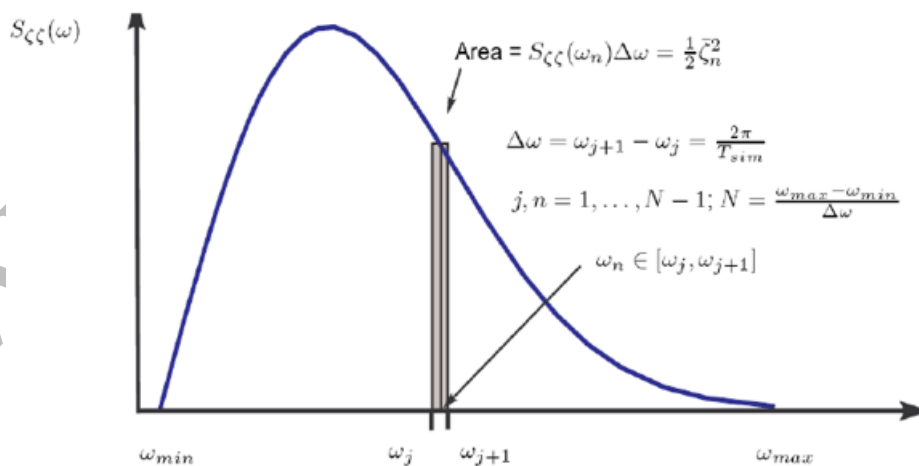
$$G(\theta, \omega) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2(\beta(\theta - \theta_p)) \quad (98)$$

$$\beta = \begin{cases} 2.61 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{1.3} & 0.56 < \frac{\omega}{\omega_p} \leq 0.95 \\ 2.28 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-1.3} & 0.95 < \frac{\omega}{\omega_p} \leq 1.60 \\ 10^y & \frac{\omega}{\omega_p} > 1.60 \end{cases}$$

$$y = -0.4 + 0.8393e^{-0.567 \ln\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

### ۸-۶-۲-۳ برهم نهی مؤلفه‌های موج منفرد با استفاده از طیف موج

به منظور دستیابی به گستره فرکانسی و انتشار زاویه‌ای، مجموعه‌ای از مؤلفه‌های موج منفرد تولید شده و سپس با استفاده از تئوری موج خطی تجمیع می‌گردند.



شکل-۱۱: یک طیف موج متداول.

برای هر مؤلفه موج، دامنه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{A^2}{2} = \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} \int_{\omega-\Delta\omega/2}^{\omega+\Delta\omega/2} S(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (99)$$

الگوی موج نهایی بعد از برهم نهی تمامی مؤلفه‌های موج منفرد با استفاده از رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\zeta(X, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \cos \alpha_{nm} \quad (100)$$

که N: تعداد مؤلفه‌های فرکانسی،

M: تعداد مؤلفه‌های فرکانسی،

$A_{nm}$ : دامنه هر مؤلفه موج منفرد،

$$\alpha_{nm} = (k_x)_{nm} x + (k_y)_{nm} y - (\omega_e)_n t + \varepsilon_{nm}$$

$$(k_x)_{nm} = k_n \cos \theta_m$$

$$(k_y)_{nm} = k_n \sin \theta_m$$

$k_n$ : عدد موج برای مؤلفه فرکانس nام،

$\theta_m$ : زاویه برخورد برای مؤلفه زاویه‌ای mام و

$\varepsilon_{nm}$ : تفاضل فاز تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۰ تا  $2\pi$  هستند.

### ۸-۶-۳ انتخاب طیف موج مناسب و ورودی‌ها

طیف موج بوسیله یک تابع توزیع انرژی موج مشخص شده توسط دو پارامتر اصلی ارتفاع موج ویژه،  $H_s$ ، و فرکانس زاویه‌ای موج پیک،  $\omega_p$ ، تعریف می‌شود همچنین بیشترین و کمترین مقدار فرکانس‌ها ( $\omega_{min}$  و  $\omega_{max}$ ) به عنوان دیگر ورودی‌ها نیز باید مشخص گردند. لازمست پهنای فرکانسی به گونه‌ای انتخاب گردد که بیشتر انرژی موج را در خود جای دهد. بطور کلی پهنای پیشنهادی برای فرکانس عبارتند از:

$$\omega_{min} = 0.5\omega_p$$

$$\omega_{max} = 2.5\omega_p$$

حداقل فرکانس زاویه‌ای  
حداکثر فرکانس زاویه‌ای

با انتخاب طیف و مقادیر ورودی، آنالیز و بررسی پارامترهای متغیر امواج حاصله بسیار مهم است. به عنوان مثال نرم افزار Fluent می‌تواند متریک‌های متنوعی را براساس ورودی‌های تعریف شده محاسبه کرده و بررسی کند که آیا پارامترها و طیف انتخاب شده مناسب هستند یا خیر. چگونگی تعریف این متریک‌ها در ادامه توضیح داده شده است.

### تخمین طول موج

طول موج بصورت  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  تعریف می‌شود که k عدد موج بوده و از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

$$\omega^2 = gk$$

برای اعماق متوسط  
برای امواج گرانش کوتاه

بنابراین:

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi}{k_{min}}$$

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi}{k_{max}}$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p}$$

حداقل مقدار طول موج

حداکثر مقدار طول موج

طول موج پیک

### تخمین پریودهای زمانی

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

پریود زمانی پیک (Peak Time Period)

$$T_m = 0.7303 + 0.04936\gamma - 0.006556\gamma^2 + 0.000361\gamma^3$$

پریود زمانی متوسط

$$T_z = 0.6673 + 0.05037\gamma - 0.00623\gamma^2 + 0.0003341\gamma^3$$

پریود زمانی Zero-Upcrossing

$\gamma$  پارامتر شکل قله می‌باشد.

### بررسی رژیم موج

برای فرض موج گرانش کوتاه باید مطمئن شد که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{h}{\lambda_{max}} > 0.5$$

در حالت کلی طیف TMA برای اعماق متوسط مناسب است. در حالیکه مدل‌های پیرسون-مسکویتز و جونزوپ انتخاب مناسبی برای فرض موج گرانشی کوتاه هستند.

### بررسی ارتفاع نسبی

برای اینکه شبیه سازی اعماق متوسط/عمیق صحیح باشد لازمست رابطه زیر بر آن حاکم باشد:

$$\frac{H_s}{h} < 0.25$$

### بررسی شیب دریا

شیب دریا از دو روش زیر محاسبه می‌شود:

$$S_p = \frac{2\pi H_s}{gT_p^2}$$

بر اساس پریود زمان پیک (Peak Time Period)

$$S_z = \frac{2\pi H_s}{gT_z^2}$$

بر اساس پریود زمانی Zero-Upcrossing

که با روابط محدود کننده زیر برای هر حالت مقایسه می‌شوند:

$$S_z \leq \begin{cases} \frac{1}{10} & T_z \leq 6s \\ \frac{1}{10} \frac{12-T_z}{6} + \frac{1}{15} \frac{T_z-6}{6} & 6s < T_z < 12s \\ \frac{1}{15} & T_z \geq 12s \end{cases}$$

$$S_p \leq \begin{cases} \frac{1}{15} & T_p \leq 8s \\ \frac{1}{15} \frac{15-T_p}{7} + \frac{1}{25} \frac{T_p-8}{7} & 8s < T_p < 15s \\ \frac{1}{25} & T_p \geq 15s \end{cases}$$

### تخمین پارامتر شکل قله

پارامتر شکل قله،  $\gamma$ ، بصورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\gamma = \begin{cases} 5 & \frac{T_p}{\sqrt{H_s}} \leq 3.6 \\ 5 \exp\left(5.75 - 1.15 \frac{T_p}{\sqrt{H_s}}\right) & 3.6 < \frac{T_p}{\sqrt{H_s}} < 5 \\ 1 & \frac{T_p}{\sqrt{H_s}} \geq 5 \end{cases}$$

برای  $\gamma = 1$  طیف جونزوپ بصورت طیف پیرسون-مسکویتز خلاصه می‌شود.

www.cfd-mrk.ir

## ۹ کوپلینگ مدل‌های VOF و Level-Set

روش Level-Set روشی محبوب برای رصد مرز بین فازها در شبیه‌سازی جریان‌های دو فازی با مرزهای پیچیده هندسی بین فازی می‌باشد. در این روش مرز بین فازها پوشش داده شده و توسط تابع Level-Set رصد می‌شود و بصورت یک فاصله علامت دار از مرز مشترک بیان می‌گردد. از آنجائیکه تابع Level-Set همواره پیوسته است لذا، گرادیان‌های مکانی آن را دقیقاً می‌توان محاسبه نمود. در این روش انحناى مرز مشترک و نیروی کشش سطحی ناشی از آن با دقت بسیار خوبی تخمین زده می‌شود. اما روش مذکور در حفاظت از بقای حجم از کاستی‌هایی نیز برخوردار است.

در مقابل روش VOF ذاتاً یک روش بقای حجمی (Volume-Conservative) می‌باشد و بر کسر حجمی هر فاز بیشتر از مرز مشترک بین فازها در هر سلول (متشکل از دو یا چند فاز) تأکید دارد. ضعف مدل VOF در محاسبه مشتقات مکانی است چراکه تابع VOF در امتداد مرز مشترک بین فازها گسسته می‌باشد. برای رفع ایرادات VOF و Level-Set می‌توان از یک روش ترکیبی متشکل از دو روش فوق استفاده نمود که در نرم افزار Fluent نیز این قابلیت وجود دارد.

باید توجه داشت روش ترکیبی VOF با Level-Set تنها برای جریان‌های دو فازی، گذرا و بدون انتقال جرم بین فازها قابل استفاده است. همچنین این روش ترکیبی در نرم افزار Fluent صرفاً برای سلول‌های سه ضلعی، چهارضلعی و ترکیب آن‌ها در شبکه‌های دو بعدی و برای سلول‌های چهار وجهی، شش وجهی و ترکیب آن‌ها برای شبکه‌های سه بعدی بکار می‌رود.

### ۹-۱ تئوری

تابع Level-Set با علامت اختصاری  $\phi$ ، بصورت یک فاصله علامت دار تا مرز مشترک بین دو فاز تعریف می‌شود. بنابراین در مرز مشترک تابع Level-Set صفر می‌باشد. تابع  $\phi(x, t)$  بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(x, t) = \begin{cases} +|d| & \text{if } x \in \text{the primary phase} \\ 0 & \text{if } x \in \Gamma \\ -|d| & \text{if } x \in \text{the secondary phase} \end{cases} \quad (101)$$

$$\Gamma = \{x | \phi(x, t) = 0\}$$

که  $d$  فاصله تا مرز مشترک است. سیر تکاملی استخراج تابع Level-Set همانند روش بکار رفته برای VOF بوده و بصورت زیر است:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = 0 \quad (102)$$

$\vec{u}$  میدان سرعت جریان کل می‌باشد. معادله ممتنم برای این روش در قالب معادله (۱۰۳) بیان می‌گردد.

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu[\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T] - \vec{F}_{sf} + \rho\vec{g} \quad (103)$$

### ۹-۱-۱ نیروی کشش سطحی

در معادله (۱۰۳)،  $\vec{F}_{sf}$  نیرو تولید شده از اثر کشش سطحی است که طبق معادله (۱۰۴) تعریف می‌شود.

$$\vec{F}_{sf} = \sigma\kappa\delta(\varphi)\vec{n} \quad (104)$$

در رابطه فوق  $\sigma$ : ضریب کشش سطحی،

$\kappa$ : انحنا مرز مشترک متوسط محلی (Local Mean Interface Curvature) نشان داده شده در (معادله ۱۰۶)،

$\vec{n}$ : بردار نرمال مرز مشترک محلی (معادله ۱۰۷) و

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 0 & |\varphi| \geq \alpha \\ \frac{1 + \cos(\pi\varphi/\alpha)}{2\alpha} & |\varphi| < \alpha \end{cases} \quad (105)$$

که  $\alpha$  ضخامت مرز مشترک است.

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \Big|_{\varphi=0} \quad (106)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \Big|_{\varphi=0} \quad (107)$$

در برخی از حالت‌ها، بکارگیری نیروی کشش سطحی پیش فرض بدست آمده از معادله (۱۰۴) موجب بروز مشکلات جدی در روند

حل می‌شود. برای کاهش این اثرات، نرم افزار Fluent دو تابع وزنی را در اختیار دارد که نیروی کشش سطحی را به سمت فاز

سنگین‌تر در سلول‌های در برگیرنده مرز مشترک مجدداً توزیع می‌کند. این دو رابطه با عناوین رابطه تصحیح چگالی (Density

Correction) و مقیاس تابع سنگین-سو (Heaviside Function Scaling) معرفی شده‌اند.

**تصحیح چگالی**

در فرمولاسیون تصحیح چگالی، معادله (۱۰۴) با ارائه یک نسبت چگالی تصحیح می‌گردد.

$$\vec{F}_{sf} = \frac{\rho}{0.5(\rho_1 + \rho_2)} \sigma \kappa \delta(\varphi) \vec{n} \quad (108)$$

که  $\rho$  چگالی حجم-مبنا (Volume-Based) می‌باشد.

### مقیاس تابع سنگین-سو

در رابطه مقیاس تابع سنگین-سو، معادله (۱۰۴) با استفاده از تابع سنگین-سوی معرفی شده در زیر اصلاح شده است:

$$\vec{F}_{sf} = 2H_\varphi \sigma \kappa \delta(\varphi) \vec{n} \quad (109)$$

$$H_\varphi = \begin{cases} 0 & |\varphi| > a \text{ (gas phase)} \\ 1 & |\varphi| > a \text{ (liquid phase)} \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varphi}{a} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{a}\right) \right] & |\varphi| \leq a \end{cases} \quad (110)$$

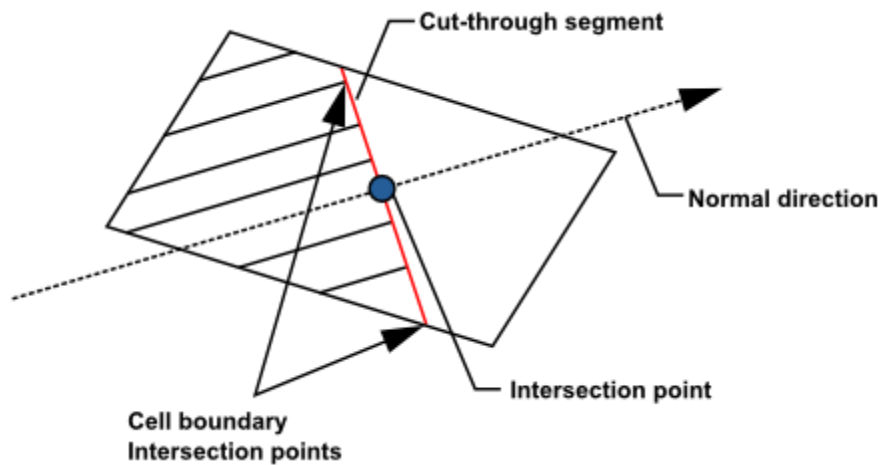
و  $a$  ضخامت مرز مشترک می‌باشد.

## ۹-۱-۲ شروع مجدد (Re-Initialization) تابع Level-Set براساس روش هندسی

بخاطر طبیعت عادلانه انتقال تابع تنظیم سطح (Level-set) در معادله (۱۰۲)، قید فاصله‌ی  $|\nabla\varphi| = 1$  بعد از حل آن نیز همچنان باقی می‌ماند. دلیل این امر تغییر شکل پروفایل ناهموار و ضخامت در امتداد مرز مشترک بین فازها می‌باشد. این خطاها در طی فرآیند سعی و خطا انباشته شده و موجب ایجاد خطاهای قابل توجه در حل معادلات ممتنم و جرم می‌شوند. بنابراین یک فرآیند شروع مجدد برای هر گام زمانی لازم است. در این مدل از روش ساختار جبهه مرزی هندسی (Geometrical Interface-Front Construction) بهره گرفته شده است. این روش هندسی درگیر یک مفهوم ساده و در عین حال قابل اعتماد برای تولید اطلاعات هندسی دقیق در جبهه مرزی فازها می‌باشد. هر دو دسته مقادیر بدست آمده از VOF و تابع Level-Set برای تجدید ساختار (Reconstruct) جبهه مرزی بکار می‌روند. برای مثال مدل VOF اندازه برش در سلولی که مرز مشترک بین فازها از آن عبور می‌کند (سلول جبهه مرزی) را تولید کرده و گردایان تابع Level-Set جهت مرز مشترک را تعیین می‌کند. همچنین از مفهوم ساختار مرز مشترک خطی تکه‌ای (Piecewise Linear Interface Construction: PLIC) نیز برای ساختن جبهه مرزی استفاده می‌شود. فرآیند تجدید ساختار عبارتند از:



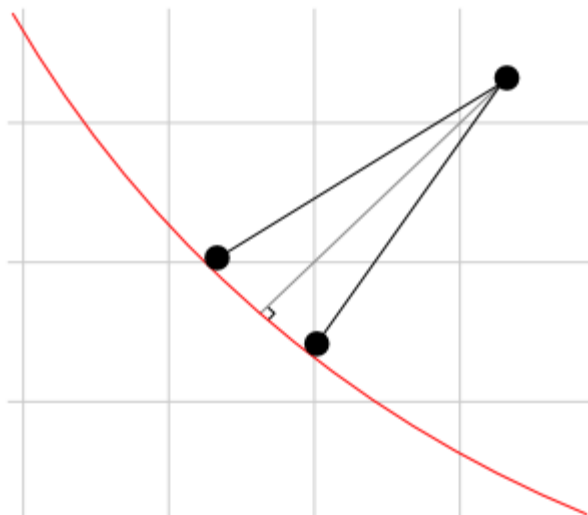
- ۱- سلول‌های جبهه مرزی بر مبنای جاییکه علامت  $\phi$  متناوب است یا مقدار کسر حجمی بین ۰ تا ۱ است، مشخص شود.
- ۲- بردار نرمال عمود بر هر تکه از مرز مشترک موجود در سلول جبهه مرزی را از گرادیان‌های تابع Level-Set محاسبه گردد.
- ۳- محل برش (مرز بین فازها) مشخص شده و اطمینان حاصل گردد که حداقل یک گوشه سلول توسط فاز موجود در سلول‌های همسایه، اشغال شده باشد.
- ۴- محل تقاطع مرز مشترک و خط عبوری از مرکز سلول و عمود بر آن پیدا شده به طوریکه مدل VOF ارضاء گردد.
- ۵- نقاط تلاقی بین مرز مشترک و مرزهای سلول مشخص شود. این نقاط تلاقی، نقاط جبهه مرزی تلقی می‌گردند.



شکل-۱۲: شماتیک برش مرز مشترک در سلول جبهه مرزی.

پس از بازسازی جبهه مرزی، فرآیند کمینه سازی نقطه مشخص (Given Point) تا مرز مشترک بصورت زیر انجام می‌شود:

- ۱- فاصله از نقطه مشخص در دامنه تا هر قطعه برش از سلول‌های جبهه مرزی حساب شود. برای اینکار:
  - a. اگر خط عمود شروع شده از نقطه مشخص با مرز مشترک در داخل قطعه برشی تلاقی کند، پس فاصله محاسبه شده به عنوان فاصله تا مرز مشترک در نظر گرفته می‌شود.
  - b. اگر نقاط تلاقی فراسوی نقاط انتهایی قطعه برش باشند کوتاه‌ترین فاصله از نقطه معین تا انتهای تکه برش یافته فاصله تا مرز مشترک را تعیین می‌کند.



شکل-۱۳: فاصله یک نقطه مشخص تا قطعه برش در سلول جبهه مرزی.

۲- تمامی فاصله‌های ممکن از نقطه مشخص تا تمام تکه‌های برشی جبهه مرزی را کمینه کرده تا بیانگر فاصله نقطه مذکور تا مرز مشترک باشد. در ادامه مقادیر این فاصله‌ها به عنوان شرایط اولیه برای شروع مجدد حل تابع Level-set مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

[۱] John D. Fenton. *"The Cnoidal Theory of Water Waves"*. *Developments in Offshore Engineering*. J.B. Herbich, Houston. ۱۹۹۸.

www.cfd-mrk.ir