

# شبکه بندی با سازمان

ارائه دهنده:

محمد رضا کلیچ

## چکیده

پروژه اول درس تولید شبکه محاسباتی در این گزارش ارائه شده است. هدف تولید شبکه با سازمان O شکل به روش جبری و دیفرانسیلی است. بیان تئوریه‌ها و روش‌های مختلف مورد نظر پروژه اول در تولید شبکه با سازمان، مطالب اصلی این گزارش بشمار می‌رود. چگونگی تولید نقاط مرزی، تولید شبکه جبری و تولید شبکه دیفرانسیلی بیضوی که از الزامات پروژه می‌باشد در این گزارش مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. همچنین برای مقایسه و درک بهتر چند روش برای توزیع نقاط با استفاده از روابط جبری معرفی و شبکه‌بندی براساس آن‌ها نیز انجام شده است. در انتهای گزارش نتیجه‌گیری و تحلیل نهایی نگارنده نیز ارائه گردید.

## فهرست مطالب

۲	چکیده.....
۴	فهرست شکل ها.....
۵	۱ مقدمه.....
۵	۱-۱ سلول های شبکه.....
۵	۲-۱ کیفیت سلول ها.....
۶	۳-۱ کیفیت شبکه.....
۷	۴-۱ انواع شبکه.....
۹	۲ تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم.....
۱۲	۳ متریک ها و ژاکوبین های تبدیل.....
۱۴	۴ مدلسازی هندسی (تعیین مرزهای داخلی و خارجی).....
۱۵	۴-۱ توزیع کسینوسی نقاط روی ایرفویل و مرز بیرونی.....
۱۶	۵ روشهای جبری تولید شبکه.....
۱۶	۵-۱ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع نمایی.....
۲۰	۵-۲ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع تانژانت هایپربولیک.....
۲۳	۵-۳ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع سینوس هایپربولیک.....
۲۷	۶ روشهای دیفرانسیلی تولید شبکه.....
۲۷	۶-۱ تولید شبکه با استفاده از معادله لاپلاس.....
۳۲	۶-۲ تولید شبکه با استفاده از معادله پواسون.....
۳۷	۷ مراجع.....

## فهرست شکل ها

- شکل-۱: انواع سلول‌های دو بعدی..... ۵
- شکل-۲: انواع سلول‌های سه بعدی..... ۵
- شکل-۳: قلمرو فیزیکی یک بدنه دوکی شکل متقارن محوری (الف) و دامنه محاسباتی متناظر با آن (ب) [۲]..... ۹
- شکل-۴: پارامترهای معرف ایرفویل..... ۱۴
- شکل-۵: قلمرو فیزیکی که یک دامنه هم‌بند دوگانه است..... ۱۵
- شکل-۶: توزیع کسینوسی گره‌های شبکه روی ایرفویل..... ۱۵
- شکل-۷: پارامترهای هندسی در تولید شبکه جبری حول ایرفویل..... ۱۷
- شکل-۸: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = -10.0$ ..... ۱۸
- شکل-۹: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = -1.0$ ..... ۱۸
- شکل-۱۰: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma \approx 0.0$ ..... ۱۸
- شکل-۱۱: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = 1.0$ ..... ۱۹
- شکل-۱۲: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = 10.0$ ..... ۱۹
- شکل-۱۳: تولید شبکه جبری  $(100 \times 100)$  با توزیع نمایی  $\sigma = 5.0$ ..... ۱۹
- شکل-۱۴: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.05, \Delta S_2 = 0.05$ ..... ۲۱
- شکل-۱۵: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.05$ ..... ۲۱
- شکل-۱۶: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.001$ ..... ۲۲
- شکل-۱۷: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.5$ ..... ۲۲
- شکل-۱۸: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.5$  در نزدیکی لبه حمله (الف) و فرار (ب)..... ۲۲
- شکل-۱۹: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.05, \Delta S_2 = 0.05$ ..... ۲۴
- شکل-۲۰: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.05$ ..... ۲۴
- شکل-۲۱: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.001$ ..... ۲۴
- شکل-۲۲: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.5$ ..... ۲۵
- شکل-۲۳: مقایسه تولید شبکه جبری  $50 \times 60$  با روش‌های تانژانت (قرمز)..... ۲۵
- و سینوس (آبی) هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.5$ ..... ۲۵
- شکل-۲۴: شبکه دیفرانسیلی  $50 \times 60$  با استفاده از معادلات لاپلاس..... ۳۱
- شکل-۲۵: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = 0.0, Q = 0.0$ ..... ۳۳
- شکل-۲۶: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = 0.0, Q = -1.5$ ..... ۳۳
- شکل-۲۷: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = 0.0, Q = 1.5$ ..... ۳۳
- شکل-۲۸: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = 0.0, Q = 0.25$ ..... ۳۴
- شکل-۲۹: مقایسه تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $(P = 0.0)$ ،..... ۳۴
- $Q = 0.0$  (سیاه)،  $Q = -0.25$  (آبی) و  $Q = 0.25$  (قرمز) در نزدیکی لبه‌های حمله و فرار..... ۳۴
- شکل-۳۰: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = 0.5, Q = 0.0$ ..... ۳۴
- شکل-۳۱: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = 0.0$ ..... ۳۵
- شکل-۳۲: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = 1.5$ ..... ۳۵
- شکل-۳۳: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = -1.5$ ..... ۳۵

## ۱ مقدمه

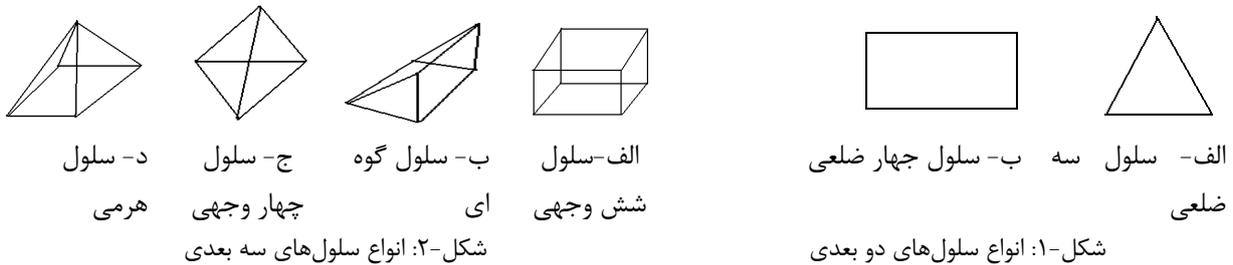
اساس دینامیک سیالات عددی بر پایه تقسیم قلمرو فیزیکی به بخشهای کوچک و اعمال معادلات حاکم روی آنها است. این بخشها را اصطلاحاً سلول می‌گویند و مجموعه این سلول‌ها به شبکه عددی معروف است. از طرفی، به تقسیم قلمرو فیزیکی به سلول‌های کوچک شبکه‌بندی می‌گویند. بسته به ابعاد قلمرو فیزیکی، شبکه تولیدی در آنها می‌تواند یک، دو و یا سه بعدی باشد.

اهمیت شبکه‌بندی تنها در تولید آن خلاصه نمی‌شود، بلکه کیفیت شبکه تولید شده نیز بسیار مهم است. نرم‌افزارهای بسیار زیادی در بحث تولید شبکه طراحی و توسعه یافته است. در مرجع [۱] تمامی نرم‌افزارهای دانشگاهی و تجاری مرتبط با تولید شبکه معرفی شد است.

در این بخش فصل و انواع شبکه معرفی می‌شود تا علاقمندان آشنایی کلی و مفیدی راجع به آن بدست آورند. در ادامه روش کلی باسازمان مقدماتی توضیح داده شده است.

### ۱-۱ سلول‌های شبکه

همانطور که در بالا اشاره شد، یک شبکه از تعداد زیادی سلول تشکیل شده است. در شبکه‌های دو بعدی سلول‌های شبکه بصورت سه یا چهار ضلعی هستند (شکل پ-۱). در حالیکه، در سه بعد سلول‌ها بصورت یکی از شکل‌های چهار وجهی، هرمی، شش وجهی و گوه‌ای است (شکل پ-۲). البته، حالت‌های خاص نیز وجود دارد، مثل سلول‌های پنج ضلعی در شبکه‌های دو بعدی.



### ۱-۲ کیفیت سلول‌ها

معیارهای مختلفی برای تعیین کیفیت سلول‌ها وجود دارد. مهمترین این معیارها عبارتند از:

- نسبت منظری (نسبت طول بزرگترین ضلع به کوچکترین ضلع) سلول‌ها تا حد امکان به عدد یک نزدیک باشد. سلول‌های مثلث شکل به حالت متساوی الاضلاع نزدیک باشد،
- حتی‌الامکان زوایا در سلول‌های چهارضلعی به ۹۰ درجه (شرط تعامد) و در سلول‌های سه ضلعی به ۶۰ درجه نزدیک باشد،
- در شبکه‌های سه بعدی سلول‌های شبکه پیچش نداشته باشد،
- تا جای ممکن سلول‌های مرزی بر مرز دیواره منطبق باشد.

لازم به توضیح است که موارد یاد شده برای سلول‌های ایده‌آل صادق است. اما در روشهای عددی تناقضات زیادی وجود دارد و راه‌کار بهینه همواره راه‌کار ایده‌آل نیست. بعنوان مثال، گاهی امکان دارد که برای شبیه‌سازی مناسب لایه مرزی و پرهیز از حجم زیاد سلول‌ها در لایه مرزی از سلول‌های با نسبت منظری بسیار بزرگ (از مرتبه صد و حتی بیشتر) استفاده کرد. همچنین، در بعضی مدل‌های هندسی پیچیده استفاده از سلول‌های بدون پیچش یا تابیدگی غیر ممکن است که نمونه آنها را می‌توان در حل عددی جریان در ماشین‌های دوار مشاهده کرد.

نکته دیگری که باید به آن توجه داشت اینست که جز در موارد خاص هیچگاه کیفیت بد سلول‌ها موجب واگرایی حل نخواهد شد، بلکه باعث کند شدن نرخ همگرایی و یا کاهش دقت خواهد شد. به هرصورت، در مواردی خاص، نظیر حالتی که از روش حل صریح برای حل معادلات جریان در دامنه محاسباتی متشکل از سلول‌های با نسبت منظری بسیار زیاد (بزرگتر از ۱۰۰۰۰) امکان واگرایی در روند حل بسیار محتمل است. با کمی دقت در مورد عدد کورانت به راحتی می‌توان به این نکته پی برد.

## ۱-۳ کیفیت شبکه

در شبیه‌سازی عددی، علاوه بر اینکه کیفیت سلول‌ها باید مناسب باشد، لازمست که شبکه نیز از کیفیت مناسبی برخوردار باشد. پارامترهای متعددی در کیفیت شبکه تأثیرگذار هستند که عدم توجه به آنها باعث صرف زمان بیشتر، کاهش دقت و تکرار شبکه‌بندی و روند حل خواهد شد. بطور کلی، مهمترین یک شبکه مناسب باید مشخصات زیر را در گوهره وجودی خود داشته باشد:

- شبکه باید به اندازه‌ای ریز باشد که پاسخها مستقل از شبکه شود،
- اختلاف مساحت بین سلول‌های مجاور در شبکه نباید بسیار زیاد باشد، (حداکثر دو برابر اختلاف مساحت قابل قبول است) و
- تراکم شبکه بتواند نسبت به گرادیان‌های هندسی و جریان تغییر کند.

کیفیت شبکه نقش بسیار موثری در همگرایی و دقت جوابها دارد. استقلال پاسخها از شبکه مهمترین پارامتر برای ایجاد اعتماد به جوابها از نقطه نظر تعداد سلول‌های شبکه است. اختلاف بیش از اندازه مساحت سلول‌های مجاور در یک شبکه موجب نوسانی شدن نامناسب باقیمانده‌ها و در نتیجه عدم همگرایی می‌شود.

بسته به نوع شبکه و ابزار تولید آن، معمولاً بین ۵۰ تا ۷۵ درصد از حجم کار در حل‌های عددی میدان جریان به تولید شبکه اختصاص می‌یابد. بنابراین، اکیداً توصیه می‌شود که در تولید شبکه حوصله و دقت کافی به خرج داده شود و در غیر اینصورت ممکن است مجبور شویم شبکه بندی قلمرو فیزیکی را مجدداً انجام دهیم.

## ۱-۴ انواع شبکه

روشهای مختلفی برای تقسیم قلمرو فیزیکی به سلول‌های کوچک توسعه یافته که نتیجه آن تنوع انواع شبکه است. علاوه بر این، معیارهای مختلفی برای دسته‌بندی شبکه‌ها وجود دارد که الگوریتم تولید شبکه (هندسه شبکه) و زمان تولید شبکه (قبل از پردازش، در حین پردازش و بعد از پردازش) از جمله این معیارها به شمار می‌رود. شبکه‌های با سازمان، بی‌سازمان، یکنواخت و غیر یکنواخت، منطبق بر بدنه (متحرک، O، C و H شکل)، چند بلوکی، همگن و غیر همگن و همچنین شبکه‌های چندگانه و تطبیقی از آن جمله می‌باشد. در جدول (پ-۱) دسته‌بندی این شبکه‌ها بطور خلاصه درج شده است.

جدول ۱- دسته‌بندی انواع شبکه براساس معیارهای هندسی و زمان تولید.

زمان تولید شبکه			الگوریتم تولید شبکه		نوع شبکه
پس از پردازش	در حین پردازش	قبل از پردازش	بی‌سازمان	باسازمان	
					با سازمان
					بی‌سازمان
					یکنواخت و غیر یکنواخت
					شکل O، C و H
					منطبق بر بدنه
					چند بلوکی
					متحرک
					همگن و غیر همگن
					سطحی <sup>۱</sup>
					چندگانه <sup>۲</sup>
					جابجا شده
					جا داده شده
					تطبیقی

لازم به توضیح است که شبکه‌های چندگانه و تطبیقی احتیاج به یک شبکه اولیه زمینه دارند. همچنین، توجه شود که ممکن است تعریف انواع شبکه‌ها برهم‌پوشی داشته باشد. بعنوان مثال، ممکن است یک شبکه چند بلوکی یک شبکه همگن یا غیر

<sup>۱</sup> - Surface Grid

<sup>۲</sup> - Multi-Grid

همگن نیز باشد. و یا یک شبکه تطبیقی چند بلوکی متحرک نیز داشته باشیم. به هر حال، این مسائل تنها در تعریف خلاصه شده و موضوع مهم همان کیفیت شبکه است. شکل تمامی شبکه‌های فوق در فصل اول همین کتاب نشان داده شده است.

### شبکه‌های باسازمان

همانطور که از نامشان پیداست، شبکه‌های باسازمان دارای ساختار اطلاعاتی منظمی می‌باشند. شبکه باسازمان به شبکه‌ای گفته می‌شود که بتوان موقعیت هر سلول و همسایه‌های آن را به آسانی حدس زد. در شبکه‌های باسازمان مشخصات هر سلول را می‌توان با دو مؤلفه  $i, j$  در دو بعد و  $i, j$  و  $k$  در سه بعد برای هر شبکه مشخص نمود. برای تولید شبکه‌های باسازمان می‌توان از یکی از سه روش جبری، جبر مختلط (دو بعدی) و دیفرانسیلی (بیضوی، هذلولوی و سهموی) استفاده نمود. شبکه‌های باسازمان مزایا و معایبی دارد که مزایای آن عبارتست از:

- شبکه از تعامد مناسبی برخوردار است،
- تولید سلول‌ها با نسبت منطقی مناسب امکان‌پذیر است،
- شبکه قابلیت پوشش لایه مرزی را بخوبی دارد،
- الگوریتم تولید چنین شبکه‌ای بسیار ساده است،
- شبکه از ساختار اطلاعاتی بسیار ساده‌ای برخوردار است،
- حجم حافظه کمی برای تولید شبکه باسازمان نیاز است و
- قابلیت تطبیق روی بدنه را به راحتی دارد (در صورتیکه از روشهای مشتقی برای تولید شبکه استفاده شود).

در کنار مزایای شبکه باسازمان مهمترین معایب آن به شرح زیر است:

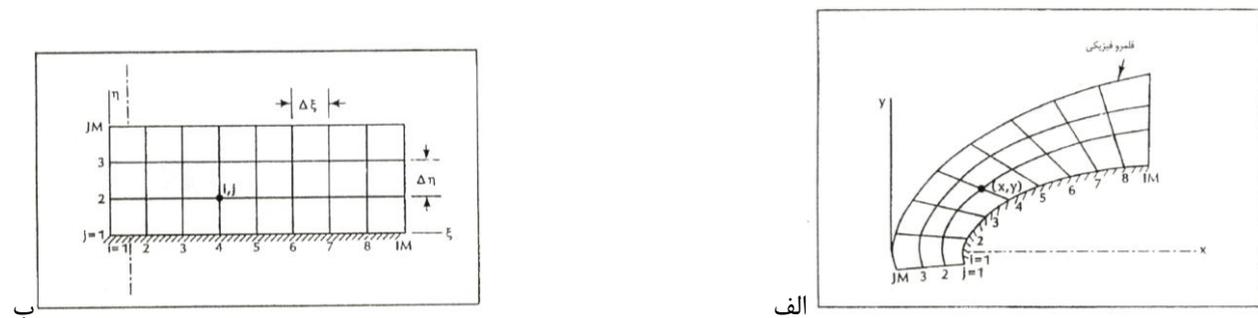
- تولید شبکه باسازمان برای هندسه‌های پیچیده اگر غیر ممکن نباشد بسیار پیچیده می‌باشد (بخصوص در نگارش برنامه‌رایانه‌ای تولید شبکه)،
- تعداد سلول‌ها در مرزهایی بی‌نهایت علی‌رغم اینکه گرادینهای جریان در آنها ناچیز است برابر تعداد سلول‌ها در مرزهای روی جسم (نواحی که تغییرات شدیدی در گرادینهای جریان وجود دارد) می‌باشد و
- تولید شبکه باسازمان حول هر جسم دلخواه منحصر به آن جسم است، یعنی اینکه نمی‌توان یک الگوریتم جامع نوشت که با استفاده از آن بتوان شبکه‌بندی را برای هر هندسه دلخواه انجام داد.

## ۲ تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم

در متد تفاضل محدود، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی در مکانیک سیالات، باید این معادلات را گسسته نمود. معادلات جبری حاصل را معادلات تفاضل محدود می‌نامند. این معادلات جبری برای شبکه ایجاد شده در قلمرو فیزیکی<sup>۱</sup> حل می‌شود. بنابراین، داخل قلمرو و روی مرزهای آن مجموعه‌ای از گره‌های شبکه باید مشخص شود.

در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی به متد تفاضل محدود، معمولاً دامنه محاسباتی به شکل مستطیل انتخاب می‌شود و گره‌های داخلی شبکه روی خطوط شبکه توزیع می‌شود. بنابراین، نقاط شبکه را می‌توان به راحتی نسبت به خطوط شبکه مشخص کرد. این نوع شبکه را شبکه با سازمان می‌نامند که موضوع بحث این فصل است. از آنجا که بیشتر قلمروهای فیزیکی مستطیل شکل نیست، ایجاد دامنه‌های محاسباتی مستطیل شکل برای چنین قلمروهایی دشوار است و برای اعمال شرائط مرزی باید از روش‌های مختلف میانبایی استفاده کرد. از آنجا که شرائط مرزی نقشی کلیدی در حل معادلات دارند، چنین میانبایی‌هایی موجب بروز خطا در نقاط حساس می‌شود. بعلاوه، در شبکه‌های غیر یکنواخت و در نزدیکی مرزها، پیچیدگی‌های بیشتری در رابطه با معادلات تفاضل محدود به وجود می‌آید، چراکه در آنجا از تقریب‌های با فواصل نامساوی استفاده می‌شود. در چنین شرائطی معادلات تفاضل محدود از گرهی به گره دیگر تغییر پیدا کرده و باعث افزایش پیچیدگی در برنامه نویسی آن می‌شود.

برای غلبه بر این مشکلات باید قلمرو فیزیکی را به فضای محاسباتی<sup>۲</sup> تبدیل کرد. این تبدیل با معرفی دستگاه مختصات کلی انجام شده و شبکه غیر مستطیلی موجود در قلمرو فیزیکی به شبکه یکنواخت مستطیلی در فضای محاسباتی تبدیل می‌شود. بعنوان مثال، تبدیل شبکه تولید شده در قلمرو فیزیکی به شبکه دامنه محاسباتی در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۳- قلمرو فیزیکی یک بدنه دوکی شکل متقارن محوری (الف) و دامنه محاسباتی متناظر با آن (ب) [۲].

<sup>۱</sup>-Physical Domain

<sup>۲</sup>-Computational Domain

لازم به توضیح است، دامنه محاسباتی با تغییر شکل قلمرو فیزیکی، مثل کشیدن، پچیدن و غیره به دست می‌آید. بحث اصلی در این مبحث تعیین گره‌های شبکه در قلمرو فیزیکی است. به عبارت دیگر گره‌های متناظر با گره‌های محاسباتی، نظیر گره (j, i) در دامنه محاسباتی، مشخص شود. بنابراین، باید توجه داشت که برای تولید شبکه، همواره لازمست یک تناظر یک به یک بین گره‌های شبکه دامنه محاسباتی و گره‌های شبکه قلمرو فیزیکی برقرار باشد.

بطور کلی، سیستم‌های ایجاد شبکه با سازمان به سه دسته مهم سیستم‌های جبری، جبر مختلط و دیفرانسیلی تقسیم می‌شود. در سیستم‌های جبری تولید شبکه، مختصات دکارتی اساساً توسط درونمایی از مرزها بدست می‌آید. در خیلی از موارد، سریعترین روش تولید شبکه، روشهای جبری می‌باشند. مهمترین مسئله در این روش این است که شبکه تولید شده خوش حالت باشد، یعنی شبکه تقریباً متعامد بوده و نسبت منطری المان‌های آن در حدود یک باشد. اغلب اتفاق می‌افتد که حل در یک ناحیه بخصوص تغییرات سریعی دارد، در این حالت وضعیت شبکه به لحاظ تعامد و تراکم، مسئله مهمی خواهد بود که باید مدنظر قرار گیرد.

در سیستم‌های دیفرانسیلی تولید شبکه، مختصات دکارتی نقاط داخل قلمرو را می‌توان با کمک حل معادلات دیفرانسیل جزئی بدست آورد، به این صورت که این مختصات جواب معادلات مورد نظر فرض می‌شود. استفاده از معادلات دیفرانسیلی یکی از متداول‌ترین و قوی‌ترین روشهای تولید شبکه با سازمان می‌باشد. سه دسته مختلف از معادلات دیفرانسیل برای تولید شبکه با سازمان وجود دارد که شامل معادلات دیفرانسیلی بیضوی، سهموی و هذلولوی می‌باشد. در ادامه راجع به خصوصیات هر یک از این سیستم‌ها توضیحاتی ارائه می‌شود.

معادلات دیفرانسیل جزئی پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی، معادلات حاکم بر جریان تک فازی است. برای حل عددی این معادلات در شبکه‌های با سازمان لازمست که معادلات حاکم بر جریان نیز به معادلات جبری تبدیل شود. اگر بجای قلمرو فیزیکی دامنه محاسباتی استفاده شود، معادلات حاکم نیز از قلمرو فیزیکی به دامنه محاسباتی انتقال می‌یابد! قابل توجه است نوع و شکل کلی معادلات تبدیل یافته همانند معادلات دیفرانسیل جزئی اولیه باقی می‌ماند. بعنوان مثال، اگر معادله اولیه سهموی باشد، معادله تبدیل یافته نیز سهموی خواهد بود. برای بررسی بیشتر فرض کنید روابط زیر بین فضای فیزیکی و فضای ریاضی وجود دارد:

$$\xi = \xi(x, y), \quad (1)$$

$$\eta = \eta(x, y). \quad (2)$$

یادآوری می‌شود قانون زنجیره‌ای برای دیفرانسیل جزئی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3)$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (4)$$

و به طور مشابه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (5)$$

حال معادله دیفرانسیل جزئی موج مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

معادله فوق با استفاده از معادلات (4) و (5) از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی (معادله 7) تبدیل می‌شود.

$$\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + a \left( \xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (7)$$

معادله یاد شده را می‌توان به صورت زیر مرتب نمود:

$$\left( \xi_x + a \xi_y \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( \eta_x + a \eta_y \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (8)$$

این معادله در قلمرو محاسباتی حل می‌شود. باید توجه داشت که مشتق‌های تبدیل  $\xi_x$ ،  $\xi_y$ ،  $\eta_x$  و  $\eta_y$  را می‌توان با استفاده از روابط (1) و (2) محاسبه کرد. با مقایسه معادله دیفرانسیل جزئی (6) با معادله تبدیل یافته (8) می‌توان دریافت که معادلات تبدیل یافته به مراتب پیچیده‌تر از معادلات اولیه هستند. بنابراین، فواید بکارگیری دستگاه مختصات کلی به علت این پیچیدگی‌ها کمتر

می‌شود. با این وجود، باز هم نسبت به مشکلات ناشی از پیچیدگی معادلات تبدیل یافته ارجحیت دارد. چگونگی بدست آوردن معادلات تبدیل در ادامه همین فصل به طور مختصر توضیح داده شده است.

### ۳ متریک‌ها و ژاکوبین<sup>۲</sup>های تبدیل

در معادلات (۴) و (۵) جمله‌هایی مانند  $\xi_x$ ،  $\xi_y$ ،  $\eta_x$  و  $\eta_y$  ظاهر شدند. این مشتق‌های تبدیل با عنوان متریک شناخته می‌شوند. روابط زیر برای متریک‌ها حاکم است:

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, \quad (۸)$$

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy. \quad (۹)$$

روابط فوق را می‌توان بصورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}. \quad (۱۰)$$

با معکوس کردن متغیرهای مستقل، یعنی  $x = x(\xi, \eta)$  و  $y = y(\xi, \eta)$  معادلات (۱۱) و (۱۲) بدست می‌آید.

$$dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \quad (۱۱)$$

$$dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \quad (۱۲)$$

این روابط در فرم ماتریسی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}. \quad (۱۳)$$

از مقایسه روابط (۱۰) و (۱۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}^{-1}.$$

<sup>۱</sup>-Metrics

<sup>۲</sup>-Jacobean

که از آن خواهیم داشت:

$$\xi_x = J y_\eta, \quad (14)$$

$$\xi_y = -J x_\eta, \quad (15)$$

$$\eta_x = -J y_\xi, \quad (16)$$

$$\eta_y = J x_\xi, \quad (17)$$

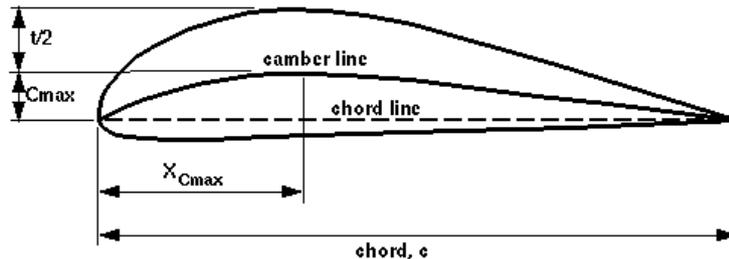
که در آنها،

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta}. \quad (18)$$

در روابط فوق  $J$  ژاکوبین تبدیل می‌باشد. لازم به ذکر است که مقدار واقعی متریک‌ها و ژاکوبین‌ها می‌تواند منفی هم باشد، چراکه این مقادیر به ویژگی‌های دستگاه‌های شبکه‌های فیزیکی و محاسباتی بستگی دارد. در این فصل چگونگی محاسبه مقادیر متریک در شبکه‌های مختلف بررسی خواهد شد.

## ۴ مدل‌سازی هندسی (تعیین مرزهای داخلی و خارجی)

چگونگی شبکه بندی باسازمان حول یک ایرفویل در یک دامنه محاسباتی دایروی، در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. طبق خواسته‌های پروژه، ایرفویل NACA0012 انتخاب شده است به طور کلی مشخصات هندسی ایرفویل‌های چهار رقمی خانواده NACA با استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) که براساس پارامترهای شکل (۲) تعریف شده، مشخص می‌شود.



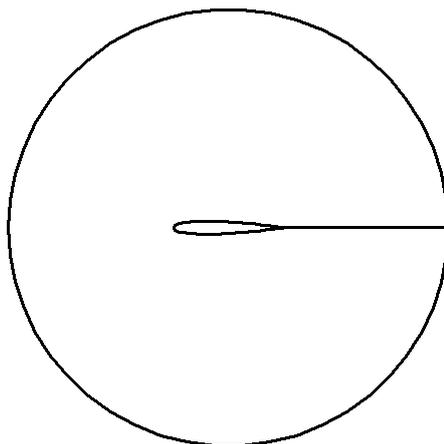
شکل-۴: پارامترهای معرف ایرفویل.

$$\begin{cases} y_c = \frac{m}{p^2}(2px - x^2) \\ y_c = \frac{m}{(1-p^2)}[(1-2p) + 2px - x^2] \end{cases} \quad (19)$$

$$\pm y_t = 5\tau(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (20)$$

قابل توجه است در معادله (۱۲۹) هندسه خط کوژ و در معادله (۱۳۰) چگونگی توزیع ضخامت ایرفویل تعیین می‌شود. در معادلات فوق  $y_c, y_t$  و  $x$  پارامترهای بدون بعد شده نسبت به وتر ایرفویل هستند. همچنین،  $\tau$  بیشترین مقدار ضخامت،  $m$  بیشترین مقدار کوژ و  $p$  مکانی که کوژ بیشترین مقدار را دارد تعریف می‌شوند. نکته‌ای که در معادلات فوق باید مورد توجه قرار گیرد آن است که در لبه فرار ضخامت ایرفویل صفر نیست. لذا، می‌توان به صورت دستی در  $x=1$  مقدار  $y_t$  را صفر قرار داد. همچنین، مرکز مختصات در نوک لبه حمله (نه در مرکز دایره) قرار دارد.

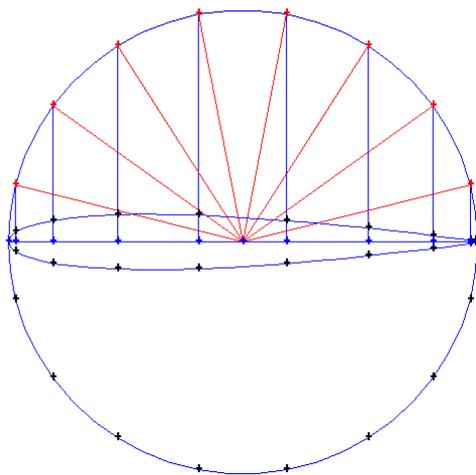
دامنه هندسی تعیین شده یک دایره به قطر ۵ (البته در عمل لازمست این کمیت خیلی بیشتر از این قرار گیرد تا بتوان شرط جریان را روی مرز خارجی با دقت مناسب استفاده نمود) و مرکز منطبق بر وسط وتر ایرفویل (شکل ۳) است. هدف تولید شبکه باسازمان با استفاده از روش‌های جبری و دیفرانسیلی بیضوی (حل معادله لاپلاس) در قلمرو فیزیکی یاد شده است که در ادامه بطور کامل تشریح شده است.



شکل-۵: قلمرو فیزیکی که یک دامنه هم‌بند دو‌گانه است.

#### ۴-۱ توزیع کسینوسی نقاط روی ایرفویل و مرز بیرونی

قبل از پرداختن به هر روش باید توزیع نقاط (گره‌های محاسباتی) روی ایرفویل مشخص گردد. یکی از راه‌های تولید نقاط محاسباتی روی ایرفویل توزیع کسینوسی است. اگر  $i$  شماره گره‌های محاسباتی در امتداد سطح ایرفویل و  $j$  شماره گره‌محاسباتی در راستای شعاع دامنه محاسباتی باشد، آنگاه توزیع گره‌های محاسباتی با استفاده از توزیع کسینوسی طبق معادله (۲۱) انجام می‌شود (شکل ۴). لازم به ذکر است برای درک بهتر توزیع کسینوسی روی دایره ای هم اندازه با ایرفویل نیز در این شکل نشان داده شده است.



شکل-۶: توزیع کسینوسی گره‌های شبکه روی ایرفویل.

$$\begin{cases} \theta_i = 2\pi \frac{i-1}{i_{\max}} \\ x(i, 1) = \frac{1}{2} \cos \theta_i + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (21)$$

## ۵ روشهای جبری تولید شبکه

روشهای جبری تولید شبکه امکان کنترل مستقیم روی توزیع نقاط شبکه را فراهم می‌کند. برخی سیستم‌های جبری باعث انتشار ناپیوستگی شیب مرز به داخل ناحیه می‌شود. این موضوع از خاصیت‌های ذاتی چنین روشی، مانند آنچه در سیستم‌های هذلولی موجود بوده، نیست. استفاده از درونیابی‌های موضعی در روش‌های بویژه جبری، مانند روش چندصفحه‌ای<sup>۱</sup>، می‌تواند از انتشار این ناپیوستگی به درون میدان جلوگیری کند.

بطور کلی، تولید شبکه با روشهای جبری (توزیع نقاط) در واقع کاربردی از درونیابی‌های ریاضی می‌باشد. این روشها درعین حالی که برای تولید شبکه ساده بوده و نیز کنترل شبکه را به راحتی میسر می‌سازد، اما نیازمند دقت ویژه در نوشتن برنامه و همچنین چگونگی استفاده از آن می‌باشد. جزئیات کامل تولید شبکه با سازمان با استفاده از سیستم معادلات جبری، در مرجع [۲] ارائه شده است. مهمترین روش‌های توزیع نقاط در تولید شبکه جبری عبارتست از توزیع نمایی، تانژانت هایپربولیک و سینوس هایپربولیک می‌باشد که در این پروژه نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۵-۱ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع نمایی

پس از تعیین نقاط روی مرزهای داخلی و خارجی با استفاده از توزیع کسینوسی، یکی از راه‌های گسسته‌سازی خطوط بین نقاط مرزهای داخلی و خارجی، روش میانمایی خارج از اعداد محدود<sup>۱</sup> است. در این روش از رابطه نمایی انبساطی (معادله ۲۲) استفاده می‌شود.

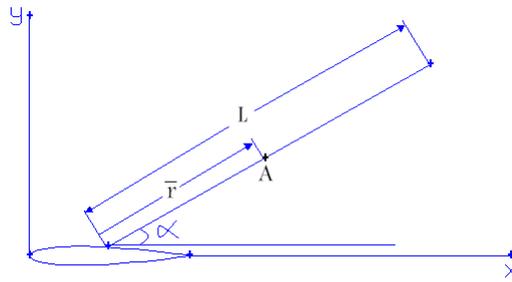
$$\bar{r} = -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ 1 - (1 - e^{-\sigma}) \frac{j-1}{J_{\max} - 1} \right] \quad (22)$$

در رابطه فوق  $\bar{r}$  بوسیله فاصله بین دو گره مرز داخلی و گره داخل دامنه محاسباتی بدون بعد شده (شکل ۵) و  $J_{\max}$  نیز بیشترین تعداد المانها در راستای شعاع دامنه محاسباتی می‌باشد.  $\sigma$  پارامتر تراکم‌سازی شبکه است. تجربه نشان داده که بهترین مقدار برای این پارامتر مقادیر بین ۱ تا ۱۰ می‌باشد که در آن شبکه از کیفیت مطلوبی از لحاظ تغییر مساحت المان‌های مجاور برخوردار باشد. از آنجائیکه  $\bar{r}$  یک پارامتر بدون بعد است، در طی فرآیند محاسبات باید در  $l_i$  (معادله ۱۳۳) ضرب شود.

<sup>۱</sup> - Multi-surface

<sup>۲</sup> - Transfinite Interpolation

$$l_i = \sqrt{[x(i, J_{\max}) - x(i, 1)]^2 + [y(i, J_{\max}) - y(i, 1)]^2} \quad (23)$$



شکل-۷: پارامترهای هندسی در تولید شبکه جبری حول ایرفویل.

بنابراین، مختصات نقطه A نشان داده شده در شکل (۵) از رابطه زیر محاسبه می‌شود (زیر نویس  $i$  در روابط زیر حذف شده است):

$$\begin{cases} x_A = x_1 + \bar{r}_A L \cos \alpha, \\ y_A = y_1 + \bar{r}_A L \sin \alpha, \end{cases} \quad (24)$$

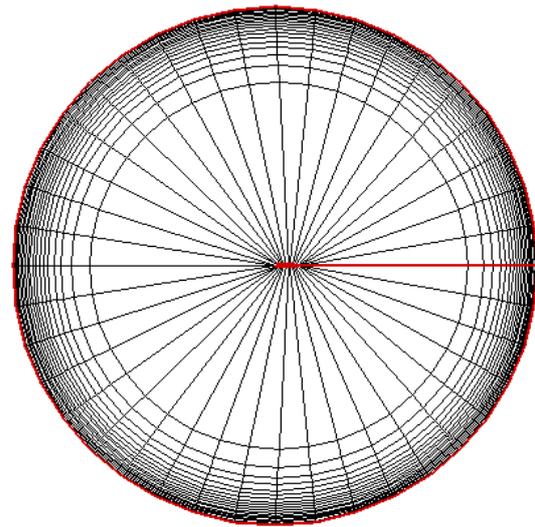
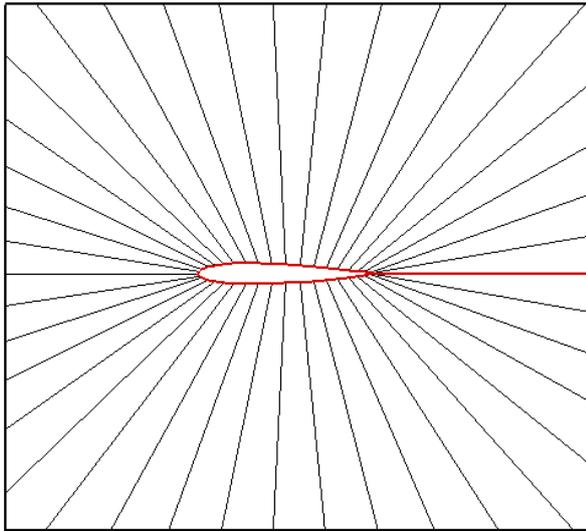
که در آن،

$$\begin{cases} \cos \alpha = (x_{J_{\max}} - x_1) / L, \\ \sin \alpha = (y_{J_{\max}} - y_1) / L. \end{cases} \quad (25)$$

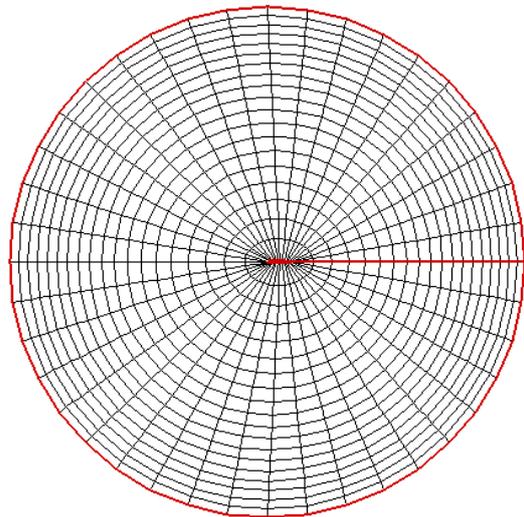
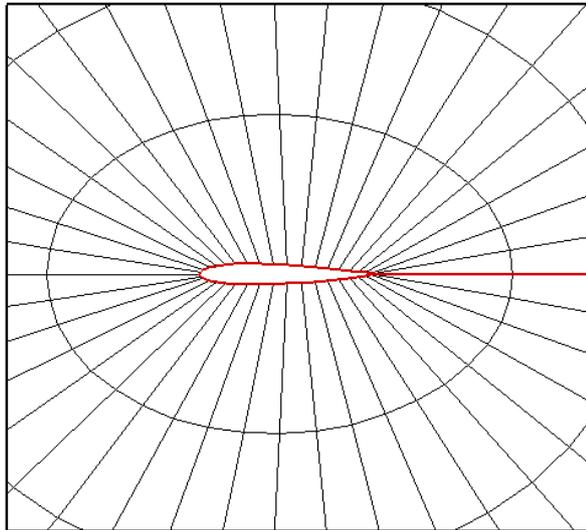
بنابراین، معادله (۲۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} x_A = x_1 + \bar{r}_A (x_{J_{\max}} - x_1), \\ y_A = y_1 + \bar{r}_A (y_{J_{\max}} - y_1). \end{cases} \quad (26)$$

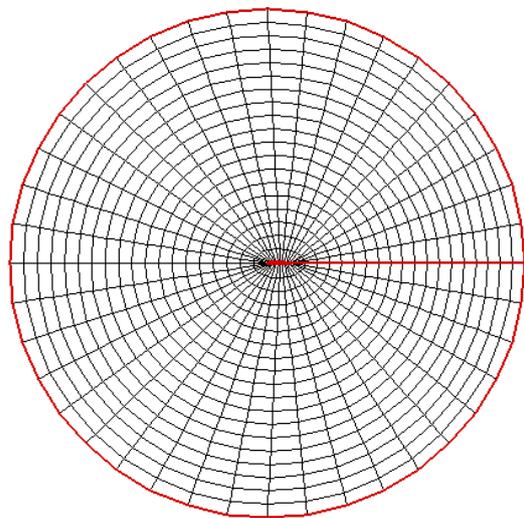
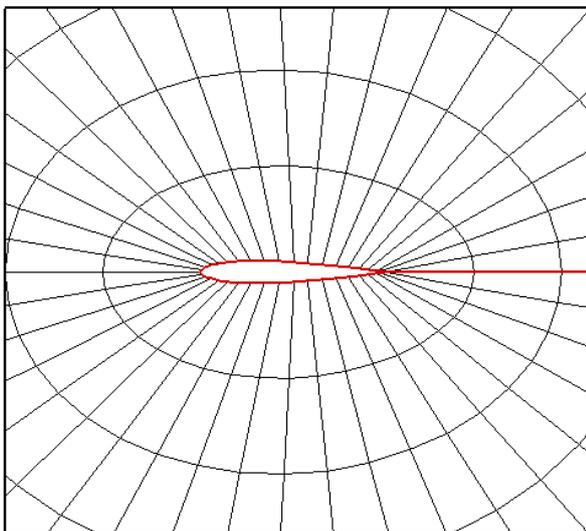
جزئیات شبکه تولید شده (۲۰\*۴۰) با این روش در شکل‌های (۶) تا (۱۰) نشان داده شده است.



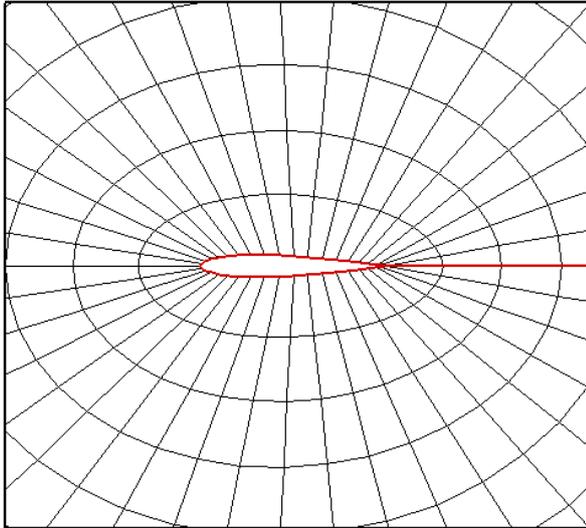
شکل-۸: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = -10.0$ .



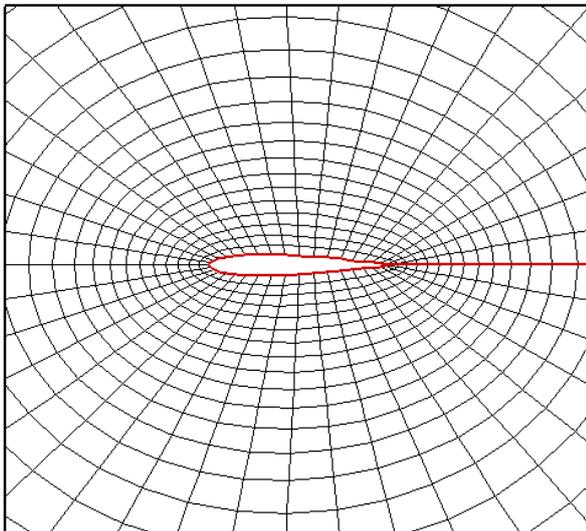
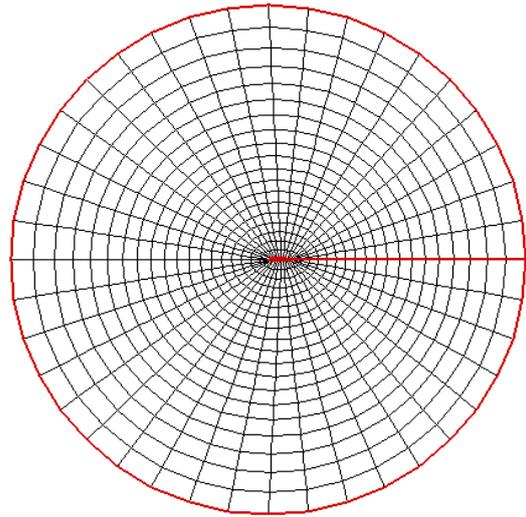
شکل-۹: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = -1.0$ .



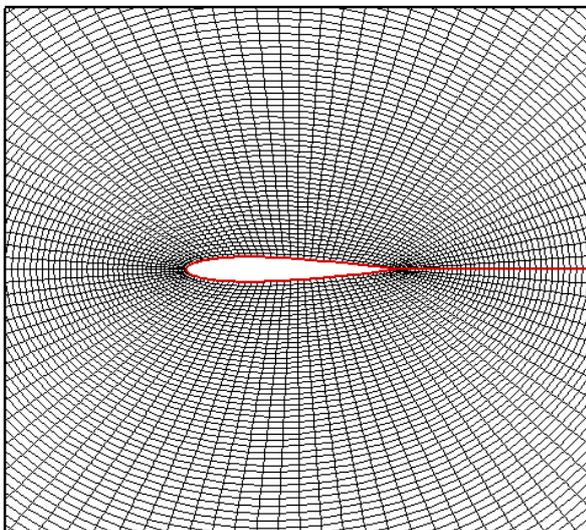
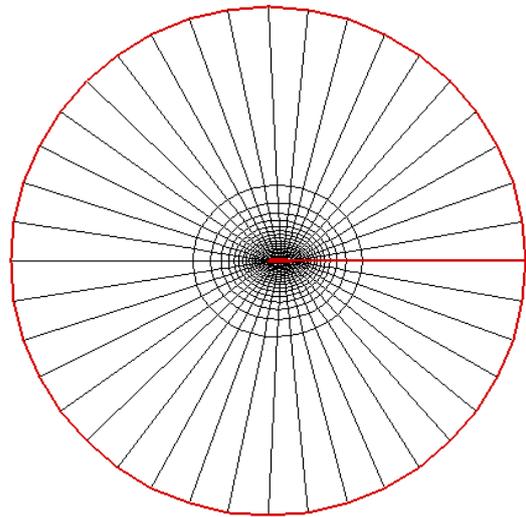
شکل-۱۰: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma \approx 0.0$ .



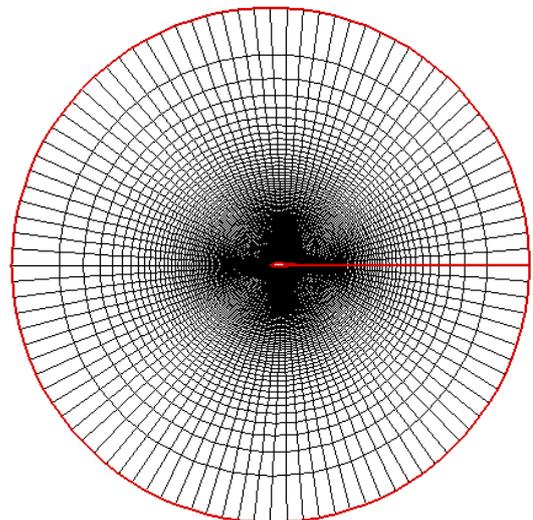
شکل-۱۱: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = 1.0$ .



شکل-۱۲: تولید شبکه جبری با توزیع نمایی  $\sigma = 10.0$ .



شکل-۱۳: تولید شبکه جبری (۱۰۰\*۱۰۰) با توزیع نمایی  $\sigma = 5.0$ .



با توجه به معادله (۲۲) مقدار  $\sigma = 0.0$  در واقع یک نقطه تکین می باشد. متراکم سازی نقاط با استفاده از روش یاد شده تنها از یک طرف امکان پذیر است. استفاده از این روش برای پوشش دادن لایه مرزی مناسب نیست چرا که لازمست در چنین حالتی مقدار  $\sigma$  خیلی بزرگ در نظر گرفته شود (بزرگتر از ۱۰۰) که این مسئله باعث پرش ناگهانی در اندازه مساحت‌های المان‌های همسایه خواهد شد (شکل-۱۰) که نوسانی شدن باقیمانده‌ها و نرخ همگرایی بسیار پایین را به دنبال خواهد داشت.

## ۵-۲ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع تانژانت هایپربولیک

روش تانژانت هایپربولیک نیز یکی دیگر از روش‌های توزیع غیر یکنواخت نقاط می‌باشد. برخلاف روش قبل این روش توانایی تراکم‌سازی دو طرفه نقاط را نیز دارد. رابطه استفاده شده برای توزیع نقاط با روش مذکور طبق معادله زیر است:

$$\bar{r} = \frac{u(\xi)}{A + (1-A)u(\xi)}. \quad (27)$$

در رابطه فوق  $u(\xi)$  و  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh \left[ \delta \left( \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\tanh \left( \frac{\delta}{2} \right)} \right], \quad (28)$$

$$A = \sqrt{\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}}. \quad (29)$$

در رابطه (۲۸)،  $\delta$  با استفاده از معادله (۳۰) و با روش سعی و خطای نیوتن رافسون (۳۱) تعیین می‌گردد. همچنین  $\Delta S_1$  و  $\Delta S_2$  نیز نسبت فواصل ابتدایی و انتهایی خط می‌باشند.

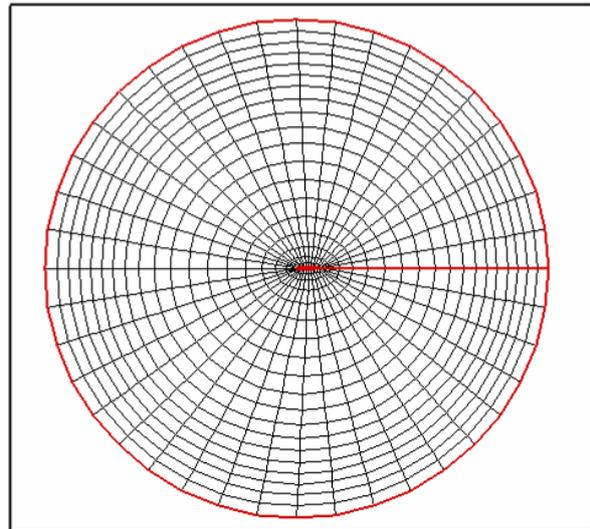
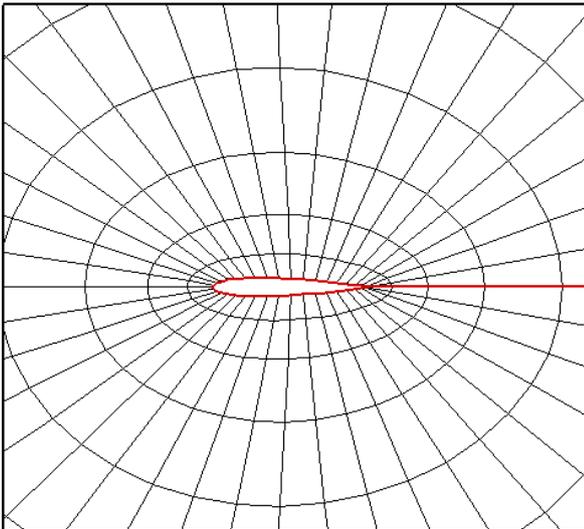
$$\frac{\sinh(\delta)}{\delta} = B \quad (30)$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n - \frac{f(\delta)}{f'(\delta)} \quad (31)$$

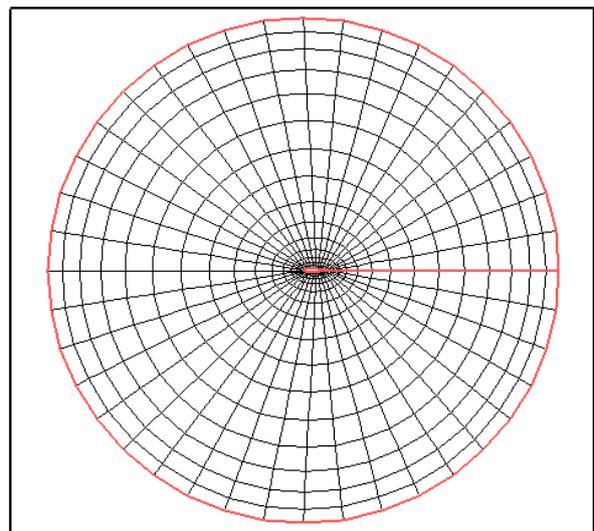
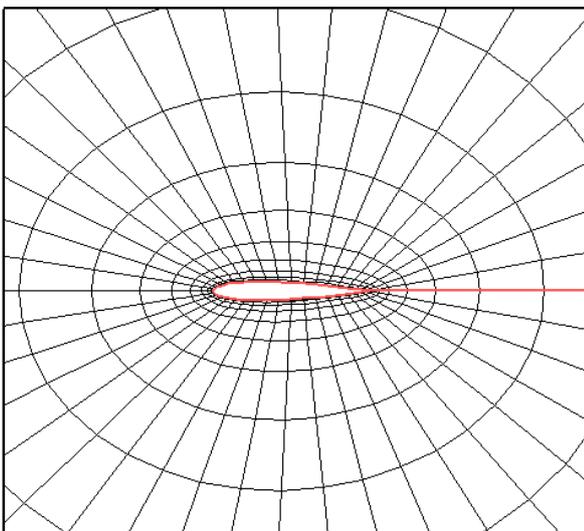
پارامتر  $B$  در معادله (۳۰) نیز طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$B = \frac{1}{I\sqrt{\Delta S_1 \cdot \Delta S_2}} \quad (32)$$

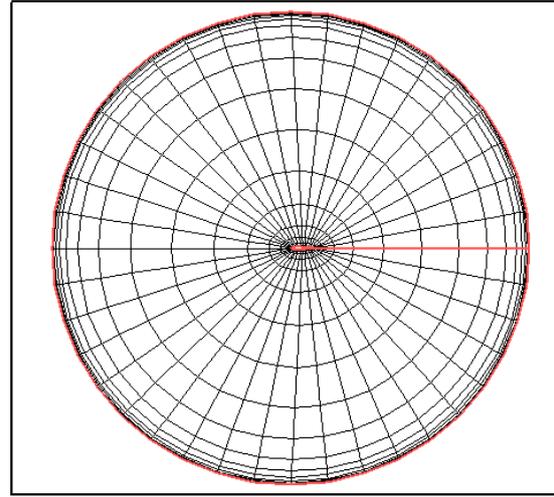
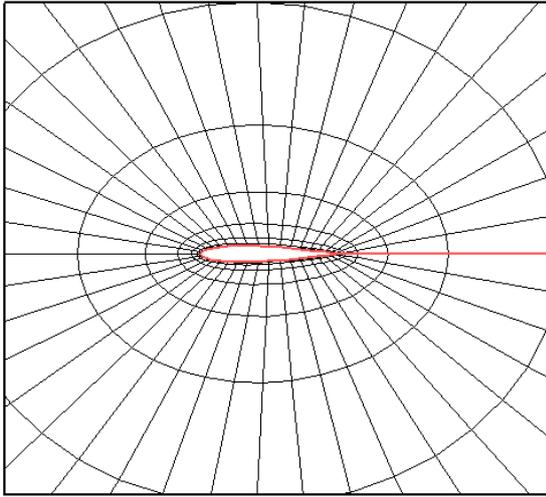
جزئیات تولید شبکه جبری  $40 \times 20$  با این روش در شکل‌های (۱۲) تا (۱۶) نشان داده شده است.



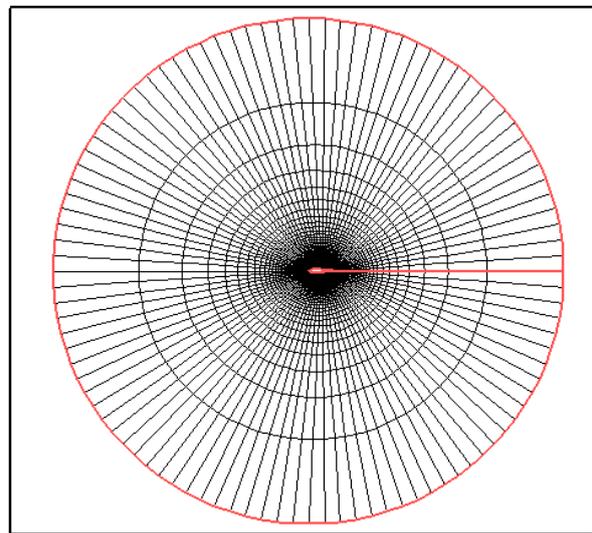
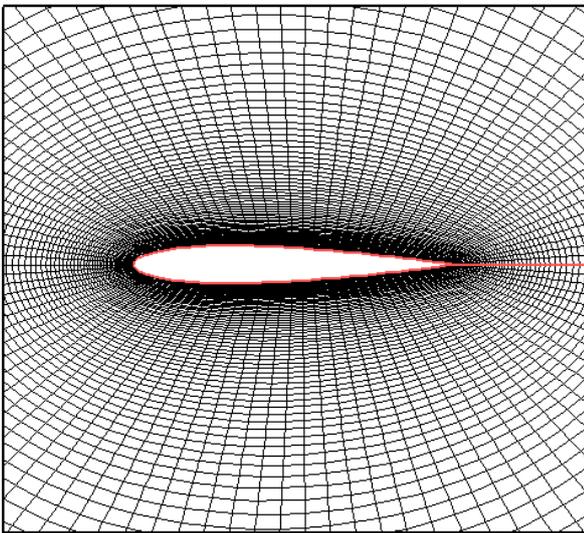
شکل-۱۴: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.05, \Delta S_2 = 0.05$



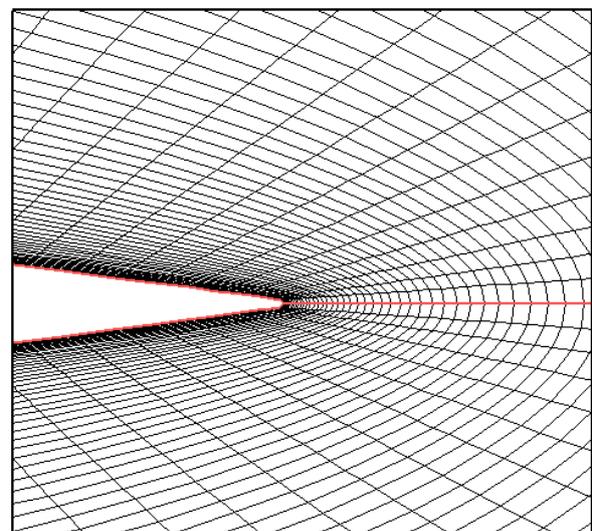
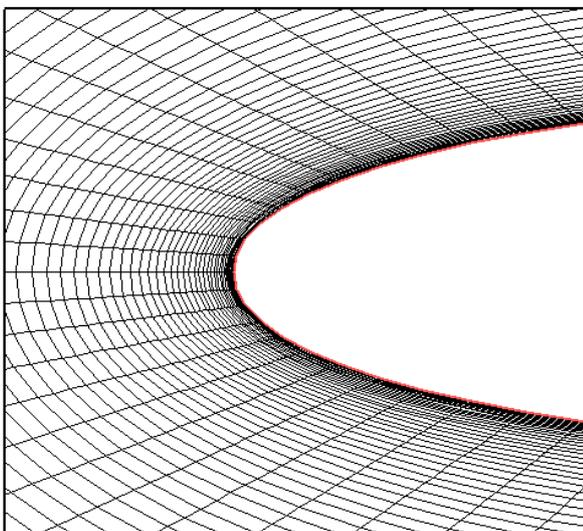
شکل-۱۵: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001, \Delta S_2 = 0.05$



شکل-۱۶: تولید شبکه جبری با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.001$ .



شکل-۱۷: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.5$ .



الف

ب

شکل-۱۸: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با تانژانت هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.5$  در نزدیکی لبه حمله (الف) و فرار (ب).

شبکه بندی با روش تانژانت هایپربولیک برای حالت‌های مختلف نشان داده است که این در روش کنترل شبکه لایه مرزی بسیار بهتر از توزیع نقاط نمایی می‌باشد. از طرفی در این روش رشد اندازه المانها نسبت به روش نمایی نیز کمتر است که این موضوع نیز یکی دیگر از مزایای توزیع تانژانتی نقاط بشمار می‌رود. مهمترین نقطه ضعف این روش محدودیت در مقدار بازه قابل قبول برای  $\Delta S_1$  و  $\Delta S_2$  می‌باشد.

### ۵-۳ تولید شبکه جبری با استفاده از توزیع سینوس هایپربولیک

کلیات توزیع نقاط به روش سینوس هایپربولیک همانند روش تانژانت هایپربولیک است. در این روش تابع توزیع نقاط روی دامنه محاسباتی به صورت زیر است:

$$\bar{r} = \frac{u(\xi)}{A + (1-A)u(\xi)}, \quad (33)$$

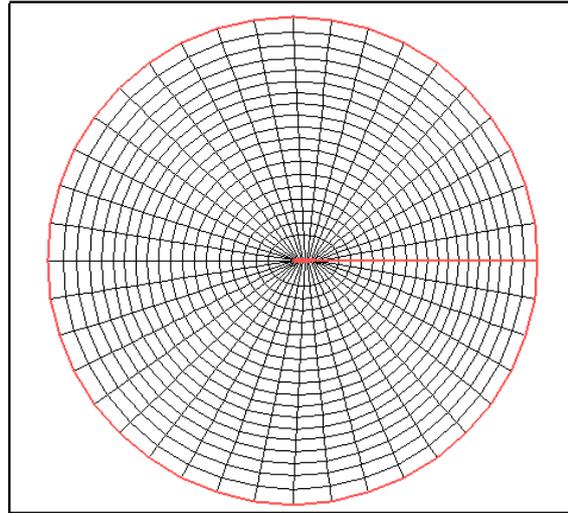
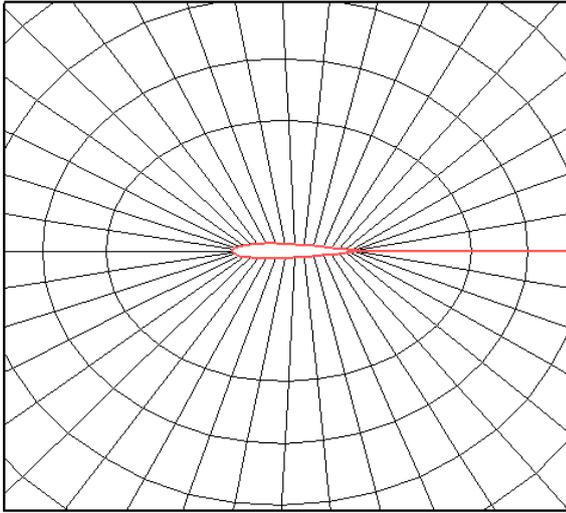
که

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sinh \left[ \delta \left( \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sinh \left( \frac{\delta}{2} \right)} \right], \quad (34)$$

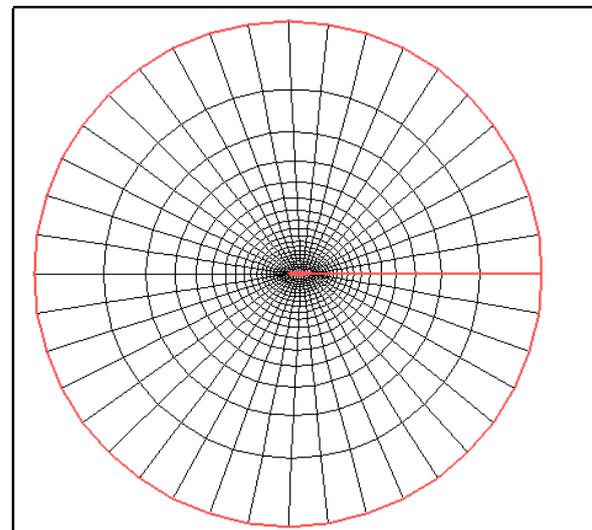
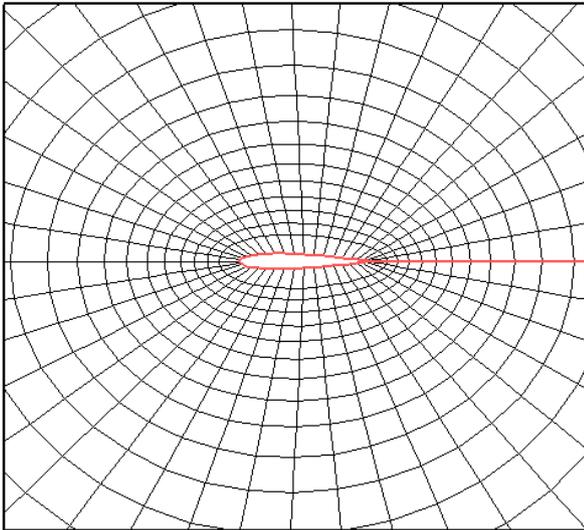
و

$$\frac{\sinh \left( \frac{\delta}{2} \right)}{\frac{\delta}{2}} = B. \quad (35)$$

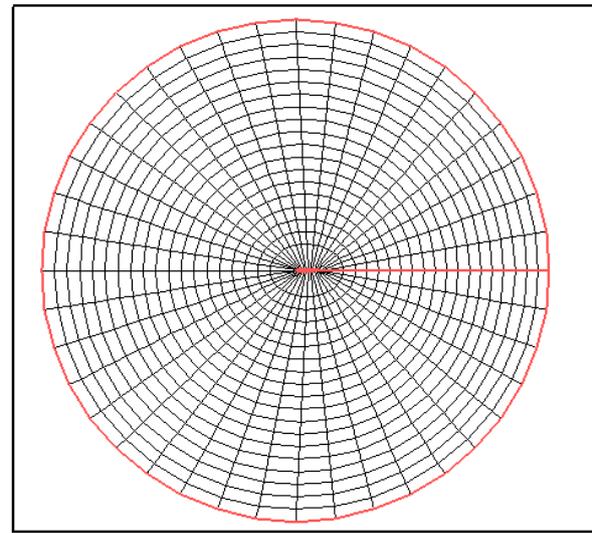
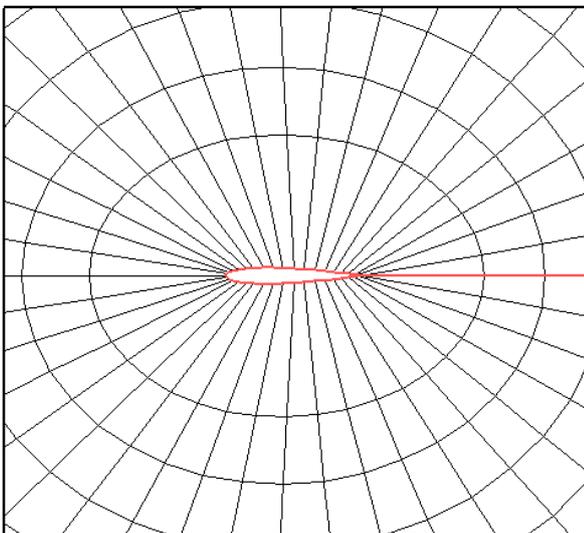
سایر تعریف‌ها و روابط همانند روش تانژانت هایپربولیک می‌باشد که در اینجا از تکرار آن خودداری شده است. جزئیات تولید شبکه جبری  $20 * 40$  با این روش در شکل‌های (۱۷) تا (۲۱) نشان داده شده است.



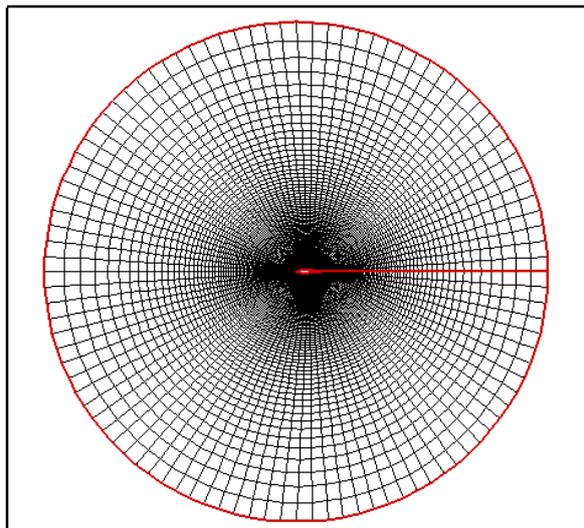
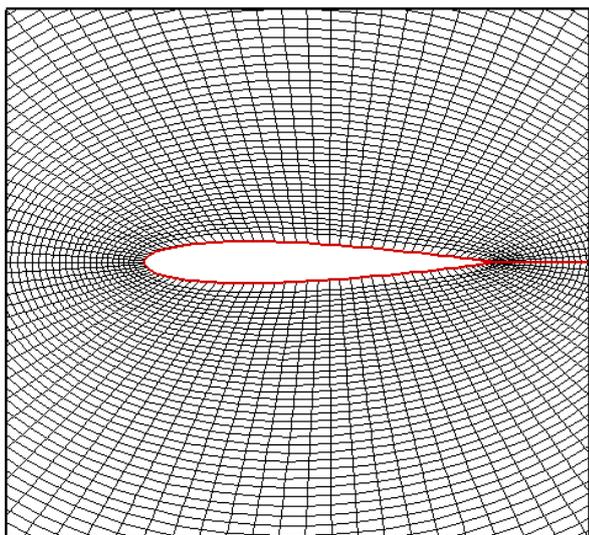
شکل-۱۹: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.05$ ,  $\Delta S_2 = 0.05$ .



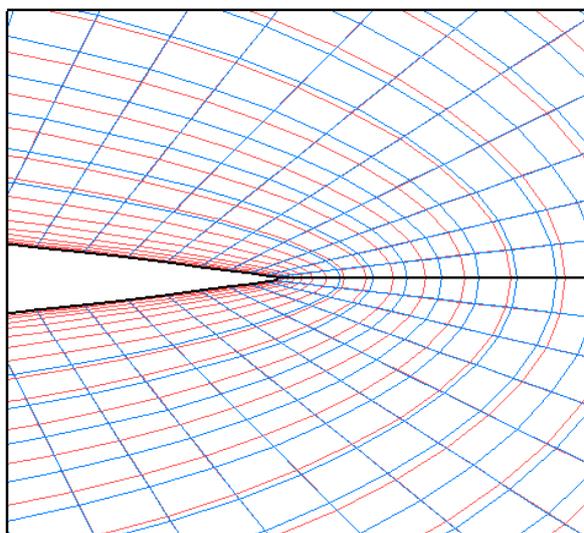
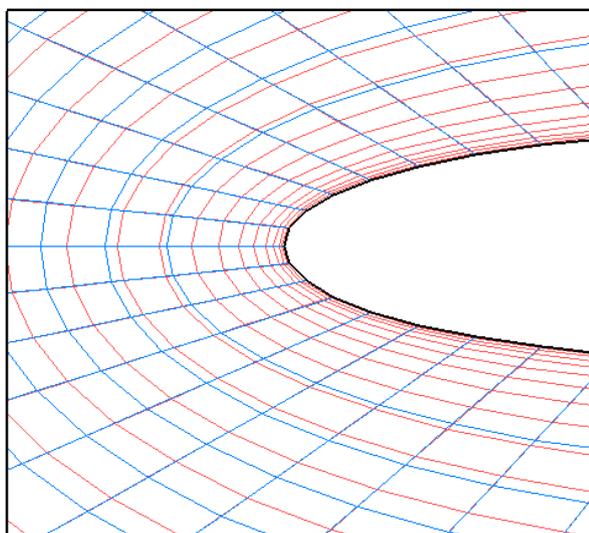
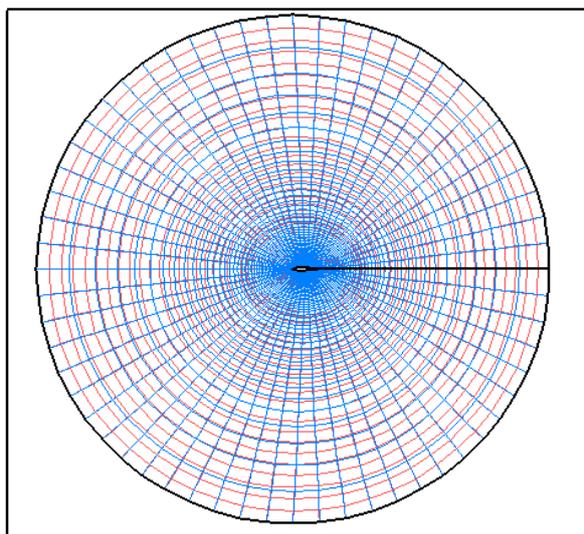
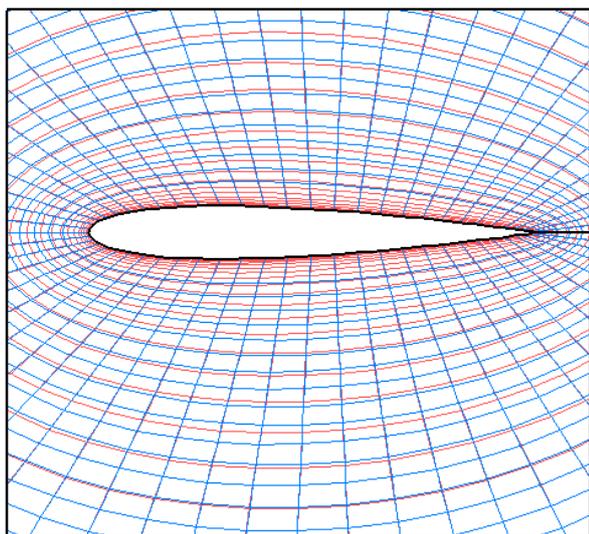
شکل-۲۰: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.05$ .



شکل-۲۱: تولید شبکه جبری با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.001$ .



شکل-۲۲: تولید شبکه جبری  $100 \times 100$  با سینوس هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.5$ .



شکل-۲۳: مقایسه تولید شبکه جبری  $60 \times 50$  با روش های تانژانت (قرمز) و سینوس (آبی) هایپربولیک  $\Delta S_1 = 0.001$ ,  $\Delta S_2 = 0.5$ .

مهمترین نکته در شبکه‌بندی به روش سینوس هایپربولیک اینست در صورتیکه  $\Delta S_1$  و  $\Delta S_2$  با هم برابر باشند شبکه تولید شده مستقل از مقدار آن‌ها خواهد بود (شکل‌های ۱۷ و ۱۹). از طرفی شدت تراکم‌سازی شبکه در انتهای خطوط (هم ابتدا و هم انتهای خطوط) در این روش نسبت به روش تانژانت هایپربولیک بسیار کمتر است (شکل ۲۱). در روش مذکور رشد المانها به مراتب از دو روش قبلی است.

## ۶ روشهای دیفرانسیلی تولید شبکه

استفاده از روش تولید شبکه بیضوی برای مرزهای مشخص بهترین گزینه است. در این روش دستگاه معادلات بصورت معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی (معادلات لاپلاس یا پواسون) استفاده می‌شود. از حل این دستگاه معادلات، مختصات نقاط شبکه به صورت نقاط شبکه در فضای فیزیکی به دست می‌آید. برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی از روش‌های تکراری مانند گوس-سایدل و غیر (پیوست الف) استفاده می‌شود.

### ۶-۱ تولید شبکه با استفاده از معادله لاپلاس

اساس استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی در تولید شبکه است. مختصات  $x$  و  $y$  نقاط شبکه در فضای فیزیکی است. بنابراین، در یک فضای بسته، توزیع گره‌ها روی مرزها مشخص شده و از حل دستگاه معادلات بیضوی توزیع گره‌های داخلی شبکه به دست می‌آید. برای درک بهتر، دستگاه معادلات لاپلاس زیر در نظر گرفته شود:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad (36)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \quad (37)$$

که در آن،  $\xi$  و  $\eta$  مختصات در قلمرو محاسباتی است. معادلات (۳۶) و (۳۷) را می‌توان با یکی از روش‌های تشریح شده در پیوست (الف) حل کرد. در هر صورت، محاسبات باید در یک قلمرو مستطیلی با فواصل یکنواخت انجام شود. برای تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی، متغیرهای وابسته و مستقل باید جا به جا شوند. عبارتهای ریاضی مرتبط در مرجع [۱] آمده است. معادلات بیضوی (۳۶) و (۳۷) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$a x_{\xi\xi} - 2b x_{\xi\eta} + c x_{\eta\eta} = 0, \quad (38)$$

$$a y_{\xi\xi} - 2b y_{\xi\eta} + c y_{\eta\eta} = 0, \quad (39)$$

که در آن،

$$a = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad (40)$$

$$b = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad (41)$$

$$c = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2. \quad (42)$$

دستگاه معادلات بیضوی (۳۸) و (۳۹) در فضای محاسباتی  $(\xi, \eta)$  حل می‌شود تا مختصات نقاط شبکه در فضای فیزیکی  $(x, y)$  به دست آید. باید دانست که این معادلات غیر خطی هستند. بنابراین، باید از یک روش خطی‌سازی استفاده نمود. برای سادگی از روش تأخیری برای ضرائب استفاده می‌شود. به عبارت دیگر ضرائب  $a$ ,  $b$  و  $c$  از نتایج تکرار قبل محاسبه می‌شود.

برای بررسی چند روش حل تکراری، معادلات تفاضل محدود را با تقریب زدن معادلات دیفرانسیل جزئی به کمک عبارتهای تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم به دست می‌آوریم. بنابراین، از معادله (۳۸) خواهیم داشت:

$$a \left[ \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{(\Delta\xi)^2} \right] - 2b \left[ \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1}}{2\Delta\xi\Delta\eta} \right] + c \left[ \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{(\Delta\eta)^2} \right] = 0. \quad (43)$$

از روش تکراری گوس-سایدل، معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] x_{i,j} = \frac{a}{(\Delta\xi)^2} [x_{i+1,j} - x_{i-1,j}] + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [x_{i,j+1} - x_{i,j-1}] - \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1}]. \quad (44)$$

با مرتب کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$x_{i,j} = \left\{ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} [x_{i+1,j} + x_{i-1,j}] + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [x_{i,j+1} + x_{i,j-1}] - \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1}] \right\} / 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right]. \quad (45)$$

به طریق مشابه برای معادله (۴۲) نیز می‌توان نوشت:

$$y_{i,j} = \left\{ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} [y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [y_{i,j+1} + y_{i,j-1}] - \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1} - y_{i-1,j+1}] \right\} / 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right]. \quad (46)$$

برای شروع حل باید توزیع اولیه مختصات  $x$  و  $y$  نقاط شبکه در فضای فیزیکی داده شود. همان گونه که قبلاً اشاره شد، می توان از یک شبکه جبری بعنوان حدس اولیه برای تولید شبکه با سازمان با روش دیفرانسیل جزئی استفاده کرد. ضرائب  $a$ ،  $b$  و  $c$  که در معادلات (۶۸) و (۶۹) ظاهر می شوند، با استفاده از تقریب تفاضل محدود معادلات (۶۳) تا (۶۵) به دست می آیند. در این معادلات، مقادیر  $x$ ،  $y$  با توزیع اولیه این مقادیر برای تکرار اول تأمین می شوند و به دنبال آن از روی مقادیر تکرار قبلی محاسبه می شوند، به این معنی که محاسبه ضرائب همواره یک گام عقب تر است. روش تکرار آنقدر ادامه می یابد تا معیار خاصی ارضا شود. بر همین اساس، خطای کلی به صورت زیر به دست می آید:

$$ERRORX = \sum_{\substack{j=JMM1 \\ i=IMM1 \\ i=2 \\ j=2}} ABS [x_{i,j}^{k+1} - x_{i,j}^k]$$

$$ERRORY = \sum_{\substack{j=JMM1 \\ i=IMM1 \\ i=2 \\ j=2}} ABS [y_{i,j}^{k+1} - y_{i,j}^k]$$

$$ERRORT = ERRORX + ERRORY.$$

در معادلات فوق  $k$  مرحله تکرار را نشان می دهد. معیار همگرایی به صورت  $ERRORT < ERRORMAX$  است که در آن مقدار مشخصی برای  $ERRORMAX$  تعریف می شود.

البته، برای حل دستگاه معادلات (۳۸) و (۳۹) از روش های تکرار دیگر نیز می توان استفاده کرد. بعنوان مثال، فرمولاسیون روش تکرار گوس-سایدل خط به خط برای این دستگاه های معادلات در قالب زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \frac{a}{(\Delta\xi)^2} x_{i+1,j}^{k+1} - 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] x_{i,j}^{k+1} + \frac{a}{(\Delta\xi)^2} x_{i-1,j}^{k+1} = \\ \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [x_{i+1,j+1}^k - x_{i+1,j-1}^k + x_{i-1,j-1}^k - x_{i-1,j+1}^k] - \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [x_{i,j+1}^k + x_{i,j-1}^k], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{(\Delta\xi)^2} y_{i+1,j}^{k+1} - 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] y_{i,j}^{k+1} + \frac{a}{(\Delta\xi)^2} y_{i-1,j}^{k+1} = \\ \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [y_{i+1,j+1}^k - y_{i+1,j-1}^k + y_{i-1,j-1}^k - y_{i-1,j+1}^k] - \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [y_{i,j+1}^k + y_{i,j-1}^k]. \end{aligned} \quad (48)$$

همچنین، برای روش تکرار خطی خلاصی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \omega \frac{a}{(\Delta\xi)^2} x_{i+1,j}^{k+1} - 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] x_{i,j}^{k+1} + \omega \frac{a}{(\Delta\xi)^2} x_{i-1,j}^{k+1} = \\ - 2(1-\omega) \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] x_{i,j}^k + \omega \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [x_{i+1,j+1}^k - x_{i+1,j-1}^k + x_{i-1,j-1}^k - x_{i-1,j+1}^k] - \omega \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [x_{i,j+1}^k + x_{i,j-1}^k] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{a}{(\Delta\xi)^2} y_{i+1,j}^{k+1} - 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] y_{i,j}^{k+1} + \omega \frac{a}{(\Delta\xi)^2} y_{i-1,j}^{k+1} = -2(1-\omega) \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right] y_{i,j}^k \\ + \omega \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [y_{i+1,j+1}^k - y_{i+1,j-1}^k + y_{i-1,j-1}^k - y_{i-1,j+1}^k] - \omega \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [y_{i,j+1}^k + y_{i,j-1}^k]. \end{aligned} \quad (50)$$

لازمست توزیع نقاط شبکه روی مرزها در فضای فیزیکی و همچنین توزیع اولیه نقاط داخلی معلوم باشد. محاسبه مقادیر

جدید  $x_{1,j}$  و  $y_{1,j}$  بعد از هر مرحله تکرار ضروری است. مقادیر  $x_{IM,j}$  و  $y_{IM,j}$  نیاز به محاسبه ندارد، زیرا خطوط  $i=1$  و  $i=IM$  برهم منطبق هستند. بنابراین،  $x_{IM,j} = x_{1,j}$  و  $y_{IM,j} = y_{1,j}$ . با استفاده از روش گوس-سایدل،  $x_{1,j}$  و  $y_{1,j}$  به صورت زیر

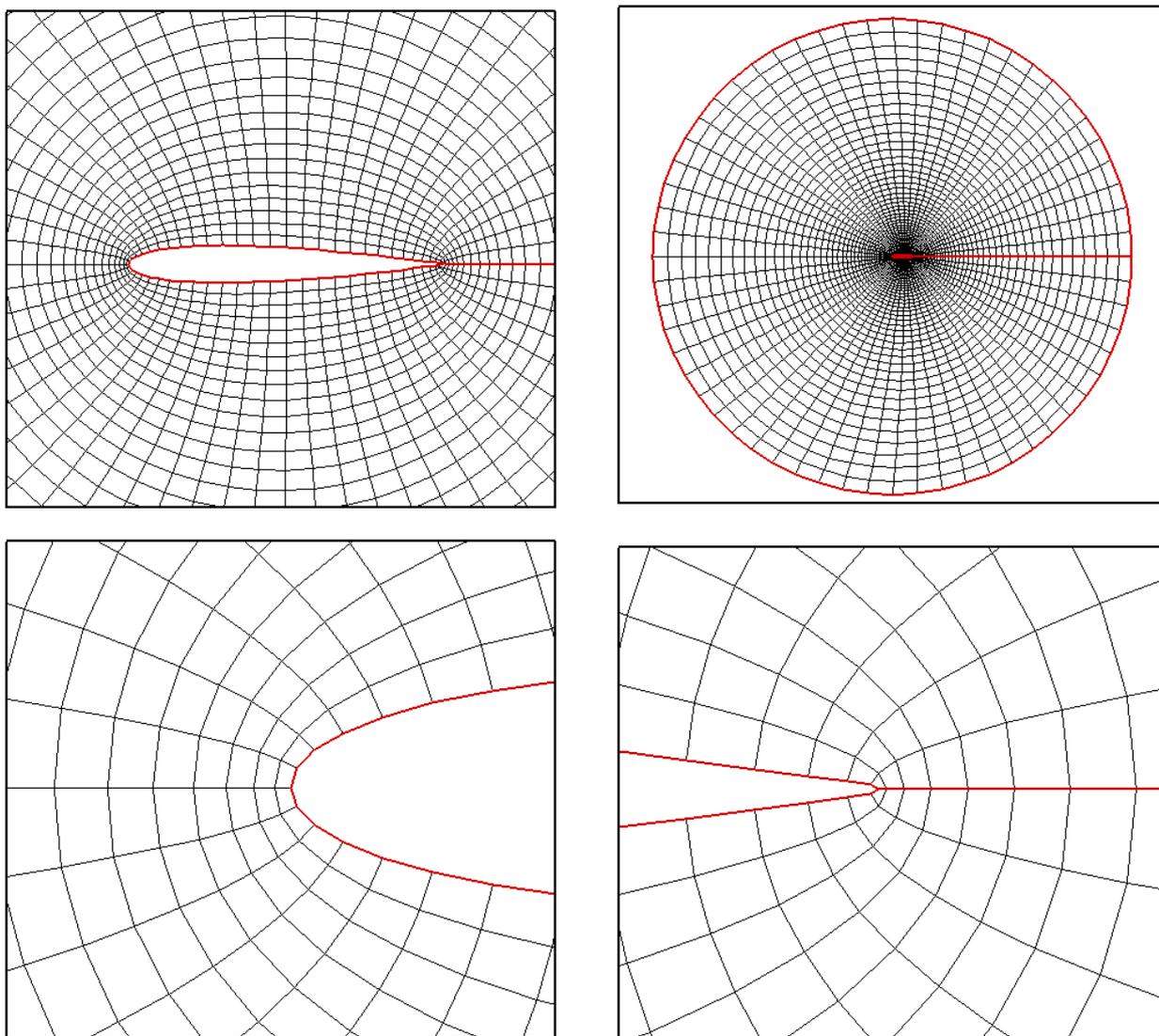
محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_{1,j} = \left\{ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} [x_{2,j} + x_{IM1,j}] + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [x_{1,j+1} + x_{1,j-1}] \right. \\ \left. - \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [x_{2,j+1} - x_{2,j-1} + x_{IM1,j-1} - x_{IM1,j+1}] \right\} / 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} y_{1,j} = \left\{ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} [y_{2,j} + y_{IM1,j}] + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} [y_{1,j+1} + y_{1,j-1}] \right. \\ \left. - \frac{b}{2\Delta\xi\Delta\eta} [y_{2,j+1} - y_{2,j-1} + y_{IM1,j-1} - y_{IM1,j+1}] \right\} / 2 \left[ \frac{a}{(\Delta\xi)^2} + \frac{c}{(\Delta\eta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

که در آن،  $IM1 = IM - 1$ . بعد از هر تکرار از این معادلات برای محاسبه موقعیت نقاط شبکه در امتداد خط برش استفاده می‌شود. باید دانست که اگر نقاط شبکه در امتداد خط برش ثابت در نظر گرفته شوند، اعوجاج شدیدی در آن امتداد ایجاد می‌شود که نامطلوب است.

لازم به ذکر است که روش استفاده شده برای حل معادله لاپلاس روش گوس-سایدل نقطه به نقطه می‌باشد. بدیهی است که شبکه نهایی مستقل از روش حل عددی می‌باشد اما، نکته قابل توجه در تولید در روش مذکور اینست که شبکه نهایی تولید شده مستقل از حدس اولیه (شبکه جبری اولیه تولید شده) نیز می‌باشد. برای نمونه شبکه تولید شده در شکل (۲۱) بعنوان حدس اولیه برای شبکه بندی با استفاده از معادلات لاپلاس مورد استفاده قرار گرفت. شکل‌های متفاوت شبکه برای حدس اولیه تنها در تعداد تکرار همگرایی موثر است. برای حدس اولیه به روش تانزانته هایپربولیک به ۱۸۳۸ تکرار و برای سینوس هایپربولیک به ۱۸۲۳ تکرار نیاز است تا باقیمانده تکرار کمتر از  $0/00001$  شود. با توجه به مطالب بیان شده، شبکه تولید شده برای پروژه حاضر با استفاده از روش دیفرانسیلی بیضوی (معادلات لاپلاس) یکتا بوده که در شکل (۲۲) نشان داده شده است.



شکل-۲۴: شبکه دیفرانسیلی  $50 \times 60$  با استفاده از معادلات لاپلاس.

## ۶-۲ تولید شبکه با استفاده از معادله پوآسون

معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی (۵۹) و (۶۰) دارای هیچ‌گونه امکان کنترل شبکه (جهت ریز یا درشت کردن آن در قسمت‌های خاص) نیستند. از طرفی، موقعیت نقاط روی بدنه جسم و روی مرز خارجی به عنوان ورودی مطرح است. برای کنترل نقاط داخلی شبکه می‌توان از معادله پوآسون استفاده نمود. مبنای این امر همان است که در ابتدای این بخش به آن اشاره شده و مجدداً در این قسمت بطور خلاصه مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مثال، انتقال حرارت هدایتی در حالت دو بعدی را در نظر بگیرید. با تغییر مکان و قدرت چشمه حرارتی، خطوط هم دما تغییر می‌کند. این منطبق به روش تولید شبکه با معادلات دیفرانسیل بیضوی تعمیم داده می‌شود. از این رو، یک عبارت چشمه به سمت راست معادلات (۳۶) و (۳۷) اضافه می‌شود. معادلات پوآسون حاصل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta), \quad (53)$$

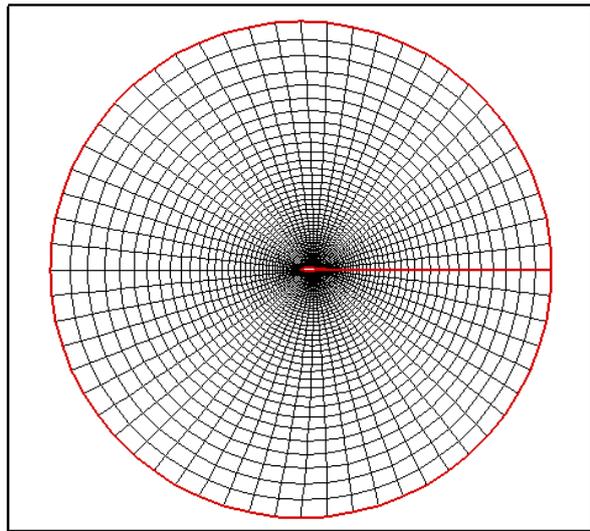
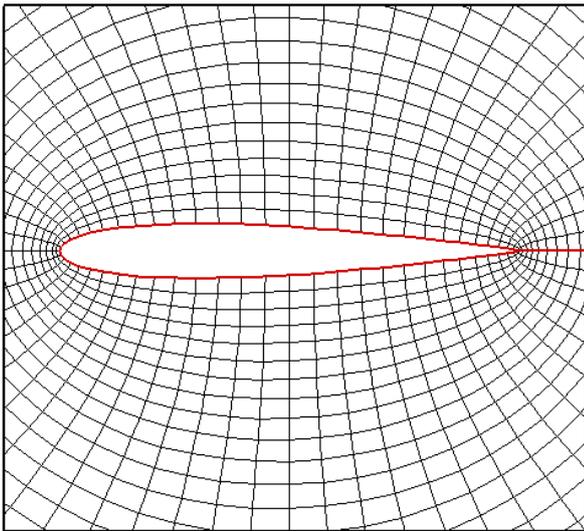
$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta). \quad (54)$$

از آنجا که این معادلات در یک قلمروی مستطیلی با فواصل شبکه مساوی حل می‌شوند، تبدیل معادلات و شرایط مرزی ضروری است. برای این کار از معادلات به دست آمده در پیوست (e) مرجع [۱] استفاده می‌شود که حاصل آن معادلات تبدیل یافته (۵۵) و (۵۶) می‌باشد.

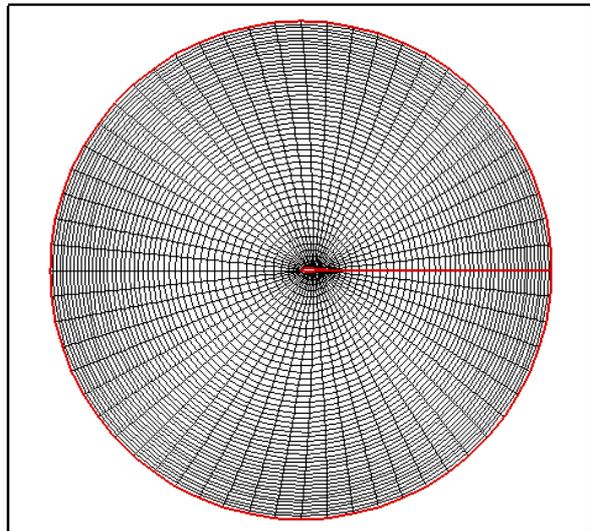
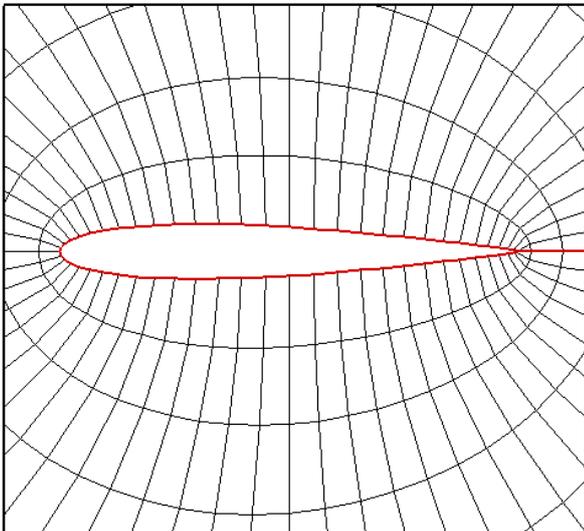
$$ax_{\xi\xi} - 2bx_{\xi\eta} + cx_{\eta\eta} = -\frac{1}{J^2}(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) \quad (55)$$

$$ay_{\xi\xi} - 2by_{\xi\eta} + cy_{\eta\eta} = -\frac{1}{J^2}(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) \quad (56)$$

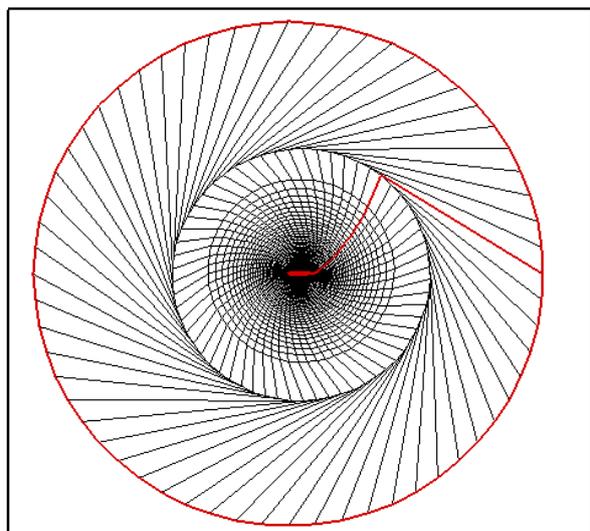
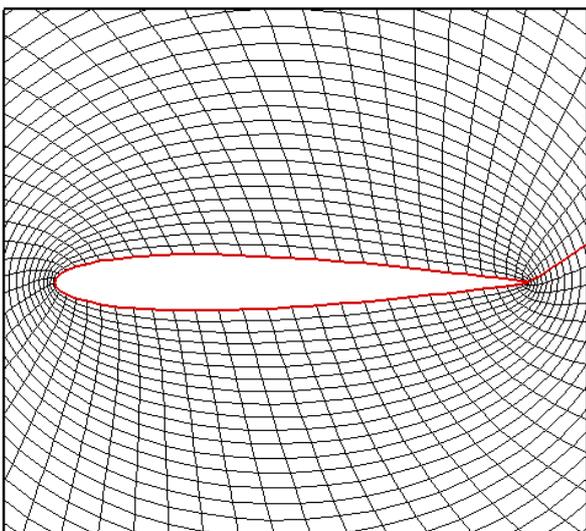
اگر P و Q معلوم باشند، این معادلات بیضوی با هر روش تکرار قابل حل خواهد بود. توابع P و Q بسته به نوع نیاز انتخاب می‌شود. نیاز ممکن است ایجاد تراکم در یک جای خاص یا عمود کردن خطوط شبکه بر سطوح جسم باشد. البته برای پروژ حاضر مقادیر ثابتی برای P و Q در نظر گرفته شده که در در شکل‌های (۲۳) تا (۳۰) نشان داده شده است.



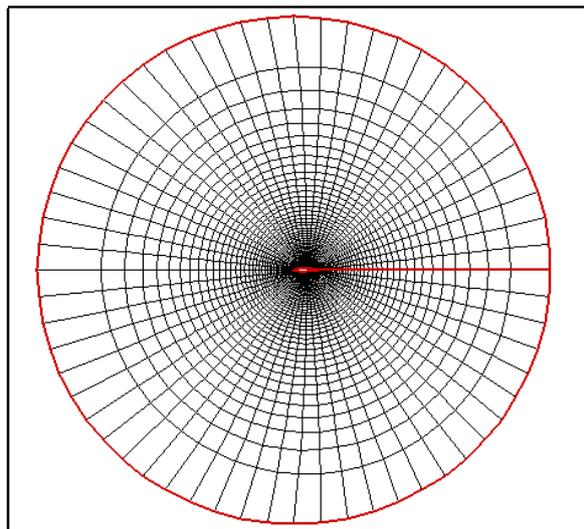
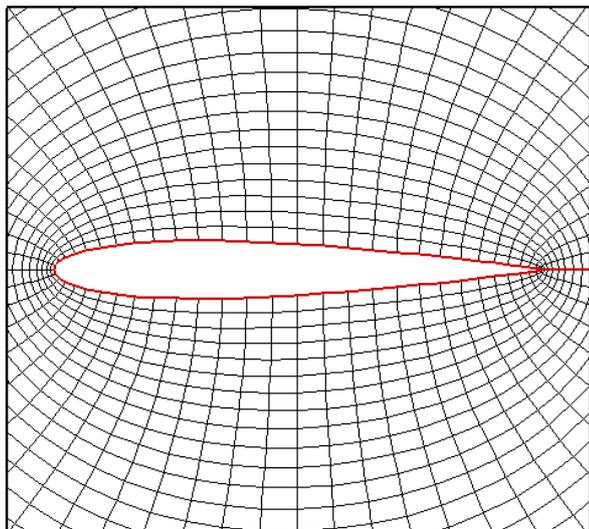
شکل-۲۵: تولید شبکه ديفرانسیلی با معادله پواسون  $P=0.0, Q=0.0$



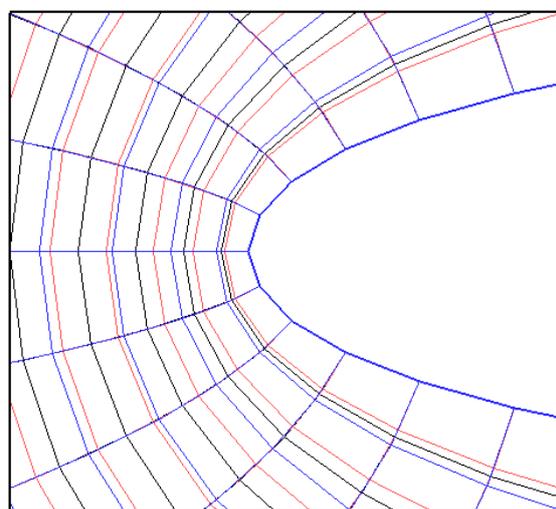
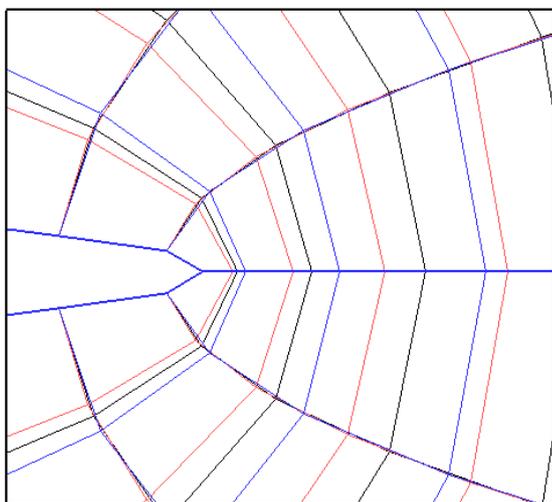
شکل-۲۶: تولید شبکه ديفرانسیلی با معادله پواسون  $P=0.0, Q=-1.5$



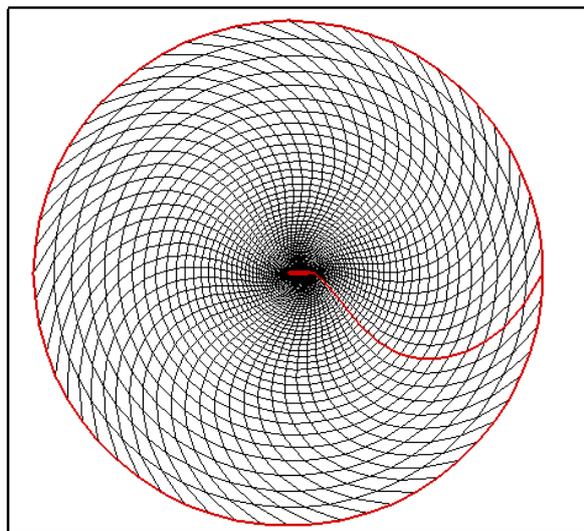
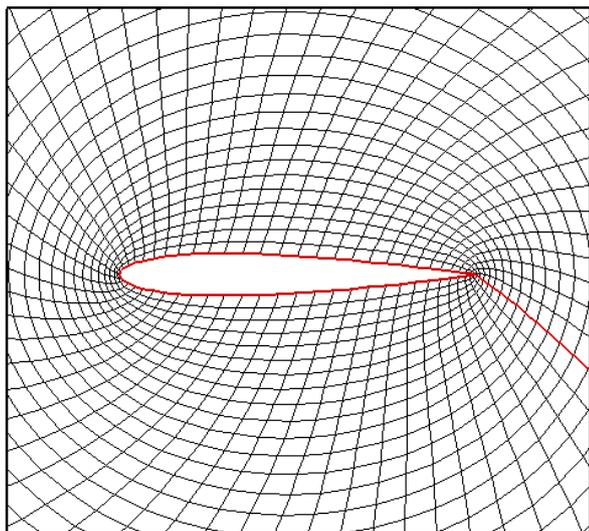
شکل-۲۷: تولید شبکه ديفرانسیلی با معادله پواسون  $P=0.0, Q=1.5$



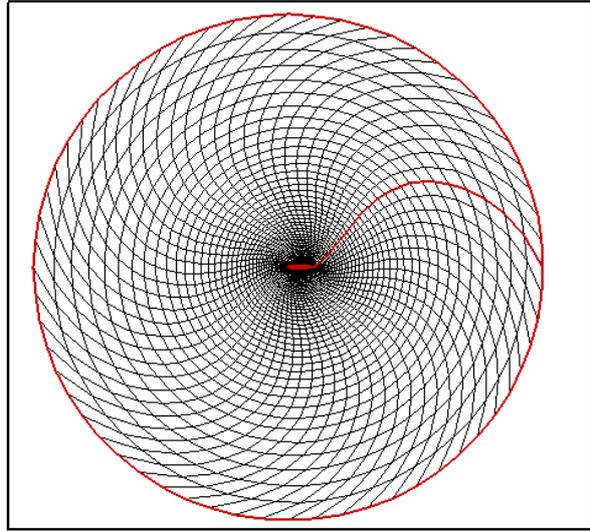
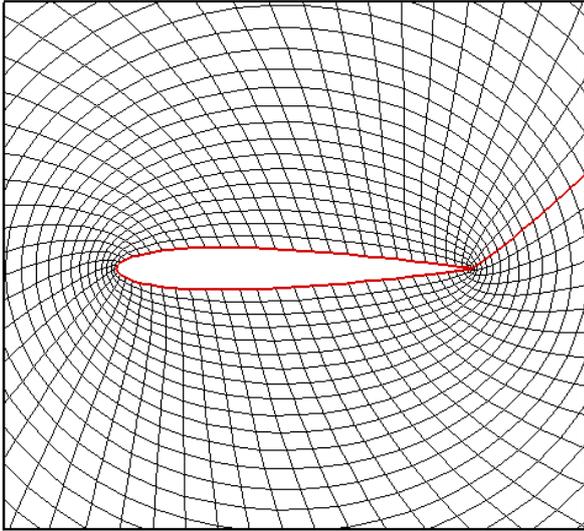
شکل-۲۸: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P=0.0$ ,  $Q=0.25$



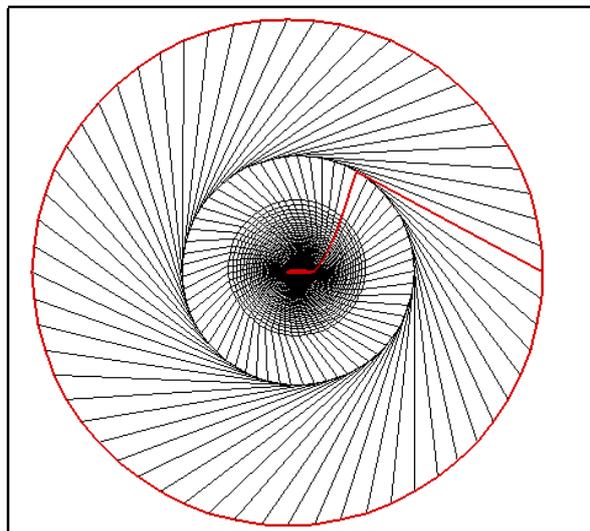
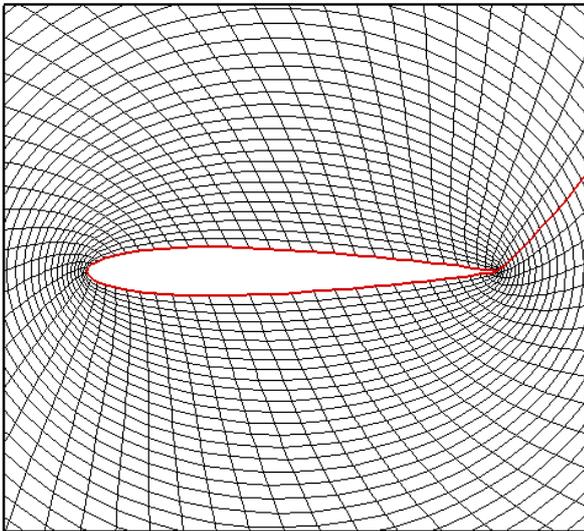
شکل-۲۹: مقایسه تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون ( $P=0.0$ ),  
 $Q=0.0$  (سیاه),  $Q=-0.25$  (آبی) و  $Q=0.25$  (قرمز) در نزدیکی لبه‌های حمله و فرار.



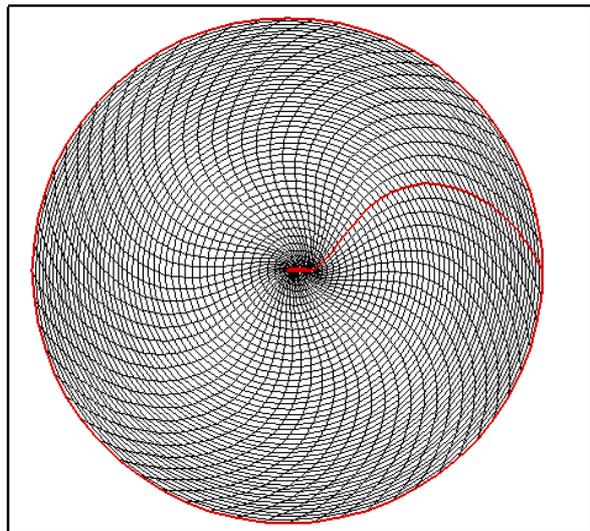
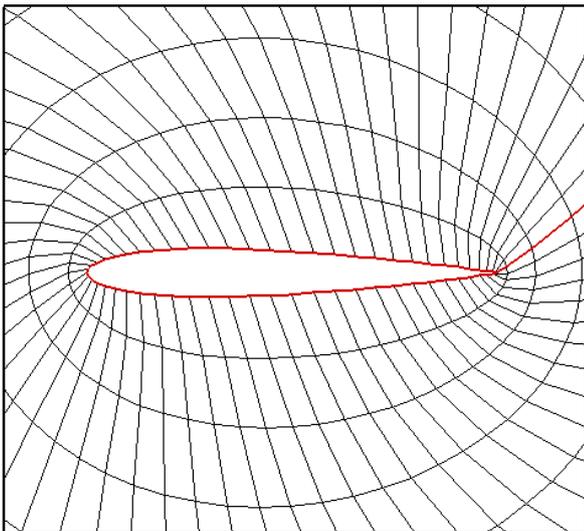
شکل-۳۰: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P=0.5$ ,  $Q=0.0$



شکل-۳۱: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = 0.0$ .



شکل-۳۲: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = 1.5$ .



شکل-۳۳: تولید شبکه دیفرانسیلی با معادله پواسون  $P = -0.5, Q = -1.5$ .

با توجه به حالت‌های مختلف شبکه بندی با استفاده از معادلات پواسون می‌توان نتیجه گرفت:

- ۱- پارامترهای  $P$  و  $Q$  به ترتیب بر تغییر شکل شبکه در جهت زاویه ای و شعاعی تأثیر گذار هستند.
- ۲- دامنه تغییرات پارامترهای فوق بصورت اعداد ثابت بسیار محدود است.
- ۳- تغییرات  $P$  و  $Q$  بصورت اعداد ثابت در کیفیت شبکه تولید شده و همچنین کنترل توزیع نقاط تا حدود بسیار زیادی ناکارآمد است و بهتر است از توابع برای تعریف آنها بهره جست.
- ۴- پارامترهای  $P$  و  $Q$  بر تعامد المان‌های شبکه نیز به شدت تأثیر گذارند.

Ref. Code	Reference Specifications
[R.۱]	سلطانی، م.، کلیچ، م.ر.، نظریور، م.، "نرم افزارهای کاربردی در دینامیک سیالات محاسباتی، جلد اول: تولید شبکه"، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، بهمن ۱۳۸۳.
[R.۲]	K. A. Hoffman AND S.T. Chaing, "Computational Fluid Dynamics for Engineer", Volume 1, Engineering Education System, Wichita, Kansas, 1993
[R.۳]	Thompson, J.F., Soni, B.K., and Weatherill, N.P., "HandBook of Grid Generation", CRC Press, London, New York and Washington D.C., 1999.