

## فصل ۲

# مدل‌های آشفته یک معادله‌ای

تهیه کننده:

محمد رضا کلیچ

## فصل -۲

با پیشرفت دانش انسان در زمینه‌های ریاضی و فیزیک بشر توانسته است که بسیاری از قوانین پدیده‌های طبیعی را کشف و درک نماید و با استفاده از مفاهیم فیزیکی و روابط ریاضی چگونگی پیدایش این پدیده‌ها را بصورت معادلات ریاضی بیان نماید. قوانین سه‌گانه نیوتن نمونه بارزی برای اثبات این ادعا می‌باشد. جریان سیال‌های گوناگون و خصوصیات مربوط به هر کدام از این سیال‌ها نیز از این امر مستثنی نبوده و روابط گوناگونی برای آن پیشنهاد شده است. دانشمندان بنامی همچون برنولی، اویلر، ناویر، استوکس، پراتل، رینولدز و بسیاری دیگر سهم بسزایی در تفهیم خواص سیال و جریانهای گوناگون داشته‌اند و به جرأت می‌توان معادله ناویر-استوکس را بعنوان کاملترین معادله جریان سیال نام برد.

بخش اول این فصل شامل توضیحاتی در مورد فیزیک جریان و شرایط حاکم بر جریان است. چگونگی بدست آوردن معادلات ناویر-استوکس برای جریانهای کلی تراکم‌پذیر، لزج و آشفته و همچنین فرم RANS معادلات حاکم بر جریان با استفاده از مفاهیمی همچون قانون بقای جرم، مومنتم و انرژی در بخش دوم تشریح شده است.

بخش سوم شامل مفاهیم پایه‌ی جریان آشفته، خصوصیات آن، تعریف مدل آشفته‌گی، خصوصیات مدل‌های آشفته‌گی و انواع آن، مفهوم لزجت گردابه‌ای و همچنین مقایسه‌ی بین انواع مدل‌های آشفته‌گی می‌باشد. علاوه بر اینها، مدل‌های یک-معادله‌ای<sup>۱</sup> بطور عام و مدل یک-معادله‌ای اسپالارت-آلماراس بطور خاص شرح داده شده است.

## ۱-۲ فیزیک جریان

در این تحقیق جریانهای گوناگونی حول اجسام مختلف بررسی شده است. در ابتدا میدان جریان تراکم‌پذیر غیرلزج حول اجسام ساده و پیچیده حل شده است. دایره، ایرفویل NACA0012 و ایرفویل NACA4412 به‌مراه فلپ از جمله هندسه‌هایی هستند که رفتار جریانهای تراکم‌پذیر غیرلزج روی آنها بررسی شده است. همانطور که قبلاً اشاره شد، مناسبترین شبکه برای تولید دامنه‌ی محاسباتی حول اجسام پیچیده، شبکه‌ی بی‌سازمان می‌باشد که در این تحقیق نیز از این نوع شبکه استفاده شده است. در فصل بعد چگونگی تولید شبکه‌ی بی‌سازمان کاملاً توضیح داده شده است.

گام بعدی پس از حل میدان جریان تراکم‌پذیر غیرلزج، حل جریان تراکم‌پذیر، لزج و آرام می‌باشد. با اطمینان از صحت برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته شده برای این حالت، رفتار جریان تراکم‌پذیر

---

<sup>۱</sup> -One-Equation Models

لزوج و آشفته که هدف نهایی این تحقیق می‌باشد، بررسی شده است. توضیحات کامل در مورد شرایط مختلف بررسی شده، در فصل نتایج گنجانده شده است.

## ۲-۲ معادلات حاکم بر جریان

تمام رژیم‌های جریان را می‌توان با استفاده از معادلات ناویر-استوکس تحلیل کرد و یا اینکه شبیه‌سازی نمود. همانطور که اشاره شد برای حل عددی جریان تراکم‌پذیر آشفته می‌توان از روش‌های DNS، RANS و غیره، استفاده کرد. برای حل عددی معادلات ناویر-استوکس به روش RANS، انجام تغییراتی در نوع نوشتار این معادلات امری ضروری است که در ادامه به آن اشاره شده است. در این بخش پس از بدست آوردن معادلات ناویر-استوکس، با استفاده از مفاهیمی همچون متوسط‌گیری زمانی و جرمی، فرم RANS این معادلات نشان داده شده است.

### ۲-۲-۱ معادلات ناویر-استوکس

در این قسمت سه قانون بقای اصلی برای جریان سیال شرح داده شده است. با استفاده از فرضیات فیزیکی و روابط ریاضی مربوطه، معادلات معروف به معادلات ناویر-استوکس بدست آمده است.

#### ۲-۲-۱-۱ قانون بقای جرم

فرض کنید ناحیه  $\Omega$  با سطح  $\Gamma$  نسبت به مبدأ مختصات اصلی، در فضا ثابت شده است (شکل ۱-۲). قانون بقای جرم بیانگر این مهم است، در صورتی که هیچ چشمه یا چاهی در این ناحیه وجود نداشته باشد، آنگاه همواره نرخ جرم سیال وارد شده به این ناحیه و جریان خارج شده از آن با هم برابر است.

نرخ جریان خروجی از ناحیه  $\Omega$  از میان المان  $dS$  برابر است با حاصلضرب  $\rho dS$  در مؤلفه عمودی سرعت  $V \cdot n$ ، که  $n = (n_1, n_2, n_3)$  بردار یکه عمود بر سطح  $\Gamma$  و  $V$  بردار سرعت می باشد. بنابراین فرم بقایی جرم را می توان اینگونه نوشت.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} \rho V \cdot n dS \quad (2-1)$$

که  $d\Omega$  المان حجمی است. با استفاده از قانون گاوس و با توجه به این موضوع که  $\Omega$  ناحیه‌ای دلخواه است، معادله بالا را بصورت معادله (2-2) برای هر قسمت از حجم کنترل  $\Omega$ ، می توان اینگونه نوشت.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2-2)$$

معادله (2-2) به نام معادله پیوستگی معروف است.

### 2-2-1-2 قانون بقای مومنتم خطی

قانون بقا اساساً بر مبنای قانون دوم نیوتن می باشد. قانون دوم نیوتن بیانگر اینست که نرخ تغییرات مومنتم خطی سیالی که هر لحظه در حجم کنترل  $\Omega$  قرار دارد با برآیند نیروهای وارد شده بر سیال برابر است.

نیروهای وارد شده بر سیال عبارتست از نیروهای حجمی، نیروهای سطحی و نیروهای هیدرواستاتیک که تشکیل دهنده ترمهای مختلف معادله بقای مومنتم می باشد.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\Omega + \int_{\Gamma} \rho V (V \cdot n) dS = \int_{\Omega} \rho F_b d\Omega - \int_{\Gamma} p n dS + \int_{\Gamma} t^{(n)} dS \quad (2-3)$$

در معادله (2-3)،  $p$  فشار هیدرواستاتیکی و  $t^{(n)}$  کشش سطحی بر واحد سطح است که کشش سطحی وابسته به مؤلفه‌های تنش و بفرم زیر می باشد.

$$i, j = 1, 2, 3 \quad \text{برای} \quad t^{(n)} = t_i n_i = n_j \tau_{ij} e_j \quad (2-4)$$

که  $\tau_{ij}$  مؤلفه تنش است و بواسطه اعمال نیرو در جهت  $e_j$  که با جهت  $e_i$  عمود است بر سطح وارد می‌شود. در شکل ماتریسی داریم:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} \dots \tau_{12} \dots \tau_{13} \\ \tau_{21} \dots \tau_{22} \dots \tau_{23} \\ \tau_{31} \dots \tau_{32} \dots \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

با استفاده از قانون گاوس برای انتگرال سطح معادله فوق را می‌توان بفرم دیفرانسیلی بقای مومنتم خطی نوشت.

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho F_{bi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-6)$$

برای سادگی کاربرد این معادلات می‌توانیم از نیروهای حجمی صرف‌نظر کرده و سیال را نیوتنی و ایزوتروپیک فرض کنیم. با استفاده از این فرضیات،  $\tau_{ij}$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (2-7)$$

که  $\delta_{ij}$  دلتای کرونگر<sup>۱</sup> می‌باشد و  $S_{ij}$  نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-8)$$

است. در اینجا  $\lambda$  و  $\mu$  لزجتهای بالک<sup>۲</sup> و دینامیکی هستند. طبق فرضیه استوکس و گازهای تک‌اتمی، این لزجتها رابطه زیر را ارضا می‌کنند.

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2-9)$$

در این حالت شکل نهایی معادله بقای مومنتم در هر کجای ناحیه  $\Omega$  بصورت معادله (۲-۱۰) نوشته می‌شود.

<sup>۱</sup> -Kroncker Delta

<sup>۲</sup> -Bulk

<sup>۳</sup> -Fourier

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2-10)$$

### ۳-۲-۱-۲ قانون بقای انرژی

قانون بقای انرژی بعنوان اصل اول ترمودینامیک شناخته شده است و بیانگر این موضوع است که انرژی جنبشی بعلاوه انرژی داخلی برابر با کار انجام شده روی سیال در حجم کنترل  $\Omega$  توسط نیروهای سطحی و حجمی روی سیال بعلاوه نرخ انرژی وارد شده به سیال بر اثر انتقال حرارت، می‌باشد.

اگر  $q_i$  مؤلفه‌های بردار شار حرارتی  $q$  باشد، بنابراین فرمول ریاضی قانون بقای انرژی بشکل زیر است.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \int_{\Gamma} \rho E u_i n_i dS = \int_{\Omega} \rho F_{bi} u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \left( -p u_i + \tau_{ij} u_j - q_i \right) n_i dS \quad (2-11)$$

که  $E$  انرژی مجموع می‌باشد. برای گاز، انرژی داخلی  $e$  تنها تابعی از دما است. با ثابت فرض کردن حرارت ویژه در فشار ثابت،  $C_p$  و حجم ثابت،  $C_v$ ، خواهیم داشت:

$$e = E - \frac{u_i u_i}{2} = C_v T \quad (2-12)$$

$$p = \left( C_p - C_v \right) \rho T = \rho R T \quad (2-13)$$

معادله دوم معادله حالت گازهاست که بیانگر رابطه بین فشار، چگالی، دما و ثابت گازها می‌باشد. قانون هدایت گرمایی فوریر<sup>۱</sup> برای شار حرارتی را می‌توان اینگونه نوشت.

$$q = -k \nabla T \quad (2-14)$$

که  $k$  ضریب هدایت‌پذیری حرارتی سیال است. بنابراین فرم نهایی معادله بقای انرژی در هر قسمت حجم کنترلی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_j \tau_{ij} + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2-15)$$

که H انتالپی سکون است و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho H = \rho E + p = \rho C_p T \quad (2-16)$$

معادلات (2-2)، (2-10)، و (2-15) فرم کامل معادلات ناویر-استوکس برای جریانهای تراکم‌پذیر آشفته می‌باشد.

## ۲-۲-۲ بسط معادلات جریان تراکم‌پذیر آشفته به فرم RANS

آشفستگی عبارتست از عدم تبعیت توده‌های متوالی در یک جریان از یک خط شناخته شده جریان، به عبارت دیگر هر توده جریان ممکن است بصورت اتفاقی موقعیت محلی خود را در هر یک از جهات تغییر دهد و بصورت یقین نمی‌توان موقعیت آنرا مشخص نمود. آنچه که مورد سؤال واقع می‌شود اینست که در صورت عدم اطمینان به موقعیت هر توده سیال چگونه می‌توان راجع به کل جریان تصمیم گرفت؟ پاسخ آنست که می‌توان بصورت آماری و با دقت قابل ملاحظه‌ای در مورد متوسط وقایع درون جریان نظر داد و بهمین شکل در مورد وقایع آن پیش بینی و آنگاه تصمیم‌گیری کرد.

### ۲-۲-۲-۱ متوسط گیری زمانی

یکی از معمولترین روشهای برخورد با جریانهای آشفته که خصوصاً در زمینه مهندسی کاربرد فراوان دارد، تفکیک خصوصیات میدان جریان به دو بخش مقدار متوسط و مقدار ناشی از نوسانات



سیال است که برای اولین بار توسط رینولدز پیشنهاد شده است. در این روش هر کمیت دلخواه  $f$  را بصورت زیر می‌نویسند.

$$f = \bar{f} + f' \quad (۲-۱۷)$$

مقدار متوسط  $\bar{f}$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt \quad (۲-۱۸)$$

ترم نوسانات بنحوی در نظر گرفته می‌شود که اگر  $\Delta t$  به اندازه کافی بزرگ باشد، متوسط زمانی آن صفر گردد.

$$\bar{f}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f' dt = 0 \quad (۲-۱۹)$$

از معادله (۳-۱۸) و با جایگذاری مستقیم، روابط زیر که در طی مراحل رسیدن به معادلات متوسط زمانی مورد استفاده قرار خواهد گرفت، بدست می‌آید.

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad ; \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \quad ; \quad \overline{fg} = \bar{fg} \quad (۲-۲۰)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \quad ; \quad \overline{f'^2} \neq 0 \quad ; \quad \overline{f'g'} \neq 0 \quad ; \quad \overline{(\bar{f} + f')^2} = \bar{f}^2 + \overline{f'^2}$$

برای متغیرهای جریان معادله (۲-۱۸) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (۲-۲۱)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (۲-۲۲)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (۲-۲۳)$$

$$f = \bar{f} + f' \quad (۲-۲۴)$$

برای محیط‌های سیالاتی تراکم‌پذیر علاوه بر تغییرات سرعت و فشار، باید تغییرات چگالی و درجه حرارت نیز بحساب آید. شکل مناسبی برای تغییر معادله متوسط‌گیری زمانی بوسیلهٔ فاوور<sup>۱</sup> و با نام متوسط‌گیری جرمی در سال ۱۹۶۵ پیشنهاد شد. او پیشنهاد کرد که پارامتری به نام سرعت میانگین‌گیری شده جرمی، تعریف شود که آنرا با  $\tilde{u}_i$  نشان داده و از رابطه زیر بدست آورد.

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{f} \int_t^{t+T} \rho(x, \tau) u_i(x, \tau) d\tau \quad (2-25)$$

که در آن  $\bar{\rho}$  میانگین زمانی چگالی می‌باشد. بنابراین بنا به متوسط‌گیری رینولدز داریم:

$$\bar{\rho} \tilde{u}_i = \overline{\rho u_i} \quad (2-26)$$

بطور کلی برای اینکه معادلات بقاء را میانگین‌گیری جرمی کنیم خواص مختلف سیال را بصورت مجزا شده متوسط‌گیری جرمی و نوسانی می‌نویسیم. بطور خلاصه، معادلات متوسط‌گیری جرمی فاوور را برای متغیرهای جریان بصورت زیر می‌توان نوشت.

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad (2-27)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2-28)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2-29)$$

$$h = \tilde{h} + h'' \quad (2-30)$$

$$e = \bar{e} + e'' \quad (2-31)$$

$$T = \tilde{T} + T'' \quad (2-32)$$

$$q_j = \tilde{q}_{ij} + q_j' \quad (2-33)$$

<sup>۱</sup> - Favre

همانطوریکه مشاهده می‌گردد،  $p$ ،  $\rho$  و  $q_j$  را بصورت ترم‌هایی از میانگین و نوسانات معمولی مجزا نموده‌ایم و با قرار دادن معادلات فوق در معادلات بقا و با انجام میانگین‌گیری، به معادلات بقا متوسط‌گیری شده فاور می‌رسیم و می‌توانیم معادلات متوسط‌گیری شده فاور و انرژی جنبشی آشفته‌گی را در فرم بقائی خود بنویسیم.

### ۳-۲-۲-۲ معادله بقای جرم

با جایگذاری مقادیر متوسط و اغتشاشات متغیرهای جریان در معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial[(\bar{\rho} + \rho')(u_i + u'_i)]}{\partial x_i} = 0 \quad (2-34)$$

و یا

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u_i + \rho'u_i + \bar{\rho}u'_i + \rho'u'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2-35)$$

با توجه به ویژگیهای متوسط‌گیری زمانی، معادله پیوستگی جریان تراکم‌پذیر را اینگونه می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial(\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u_i + \overline{\rho'u'_i})}{\partial x_i} = 0 \quad (2-36)$$

و با استفاده از متوسط‌گیری جرمی فاور فرم بقائی معادله پیوستگی را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial(\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2-37)$$

### ۴-۲-۲-۲ معادله بقای مومنتم

با در نظر گرفتن معادله بقای مومنتم که بصورت زیر نوشته شده است

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-38)$$

با گسسته سازی مؤلفه های سرعت و فشار بفرم متوسط جرمی فاوور و با جایگذاری آن در معادله (۲-۳۸)، به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\tilde{u}_i + u_i'')] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{u}_j + u_j'')] = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[ \frac{\partial(\tilde{u}_i + u_i'')}{\partial x_j} + \frac{\partial(\tilde{u}_j + u_j'')}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial(\tilde{u}_k + u_k'')}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} \quad (2-39)$$

با توجه به ویژگیهای متوسط گیری زمانی رینولدز و متوسط گیری جرمی فاوور در نهایت معادله (۲-۳۹) را اینگونه می توان نوشت.

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij}^l - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \quad (2-40)$$

که:

$$\bar{\tau}_{ij}^l = \mu \left( \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2-41)$$

معادله (۲-۴۰) تنها در وجود تانسور تنش رینولدز  $\bar{\tau}_{ij}^l = \overline{\rho u_i'' u_j''}$  با فرم آرام معادله مومنتم تفاوت دارد. قابل توجه است که  $\bar{\tau}_{ij}^l$  شامل اغتشاشات لزجت است ولی  $\bar{\tau}_{ij}^t$  شامل اغتشاشات چگالی و سرعت است.

### ۵-۲-۲-۲ معادله بقای انرژی

شکل کلی معادله بقای انرژی اینچنین است.

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j H)}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2-42)$$

که

$$E = e + \frac{u_i u_i}{2} \quad (\text{انرژی کل}) \quad (2-43)$$

$$H = h + \frac{u_i u_i}{2} \quad (\text{انتالپی کل}) \quad (2-44)$$

با گسسته سازی متغیرهای جریان همچون دما، فشار و انتالیپی که در روابط (۳-۲۷) تا (۳-۳۳) بدان اشاره شده است. مقدار متوسط آنها بصورت زیر تعریف شده است.

$$\tilde{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}} \quad (۲-۴۵)$$

و

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}} \quad (۲-۴۶)$$

$$H'' = h'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{u_i'' u_i''}{2} - \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}} \quad (۲-۴۷)$$

با استفاده از قانون فوریر می‌توان نوشت:

$$q_i^l = \frac{-\mu}{Pr_l} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} \quad (۲-۴۸)$$

در معادله (۲-۴۸) پارامتر  $Pr_l$  که عدد پرانتل جریان آرام می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$Pr_l = \frac{C_v \mu}{K} \quad (۲-۴۹)$$

برای گازهای کامل حرارت ویژه ثابت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (۲-۵۰)$$

که  $R$  ثابت گازهاست و اینگونه تعریف می‌شود:

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (۲-۵۱)$$

که  $\bar{R}$  ثابت جهانی گازها و  $M$  وزن ملکولی گاز است. با جایگذاری معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۷) در

معادله (۲-۴۲) و متوسط گیری زمانی معادله انرژی را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \bar{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \tilde{u}_i \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -q_j^l - \overline{\rho u_j'' h''} + \overline{\tau_{ij}^l u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{u_i'' u_i''}{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{u}_i \left( \tau_{ij}^l - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) \right] \end{aligned} \quad (۲-۵۲)$$

### ۲-۲-۳ بدون بعد سازی معادلات حاکم

برای بدون بعد سازی معادلات لازم است که متغیرهای جریان را بدون بعد نمود. فرم بدون بعد این متغیرها بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty} \dots; \dots; u_i^* = \frac{u_i}{u_\infty} \dots; \dots; x_i^* = \frac{x_i}{L} \dots; \dots; H^* = \frac{H}{u^2} \\ t^* &= \frac{u_\infty t}{L} \dots; \dots; T^* = \frac{C_p T}{u_\infty^2} \dots; \dots; p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2} \dots; \dots; E^* = \frac{E}{u_\infty^2} \\ k^* &= \frac{k}{u_\infty^2} \dots; \dots; \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \dots; \dots; \mu_t^* = \frac{\mu_t}{\mu_\infty} \dots; \dots; \varepsilon^* = \frac{\varepsilon L}{u_\infty^2} \end{aligned} \quad (۲-۵۳)$$

که اندیس  $\infty$  بیانگر شرایط جریان در بینهایت است و عدد رینولدز نیز اینگونه تعریف می‌شود.

$$Re = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty \quad (۲-۵۴)$$

که  $L$  طول مشخصه است. با جایگذاری روابط فوق در معادلات حاکم و پس از چندین بار باز چینی معادلات و همچنین با صرفنظر کردن از اندیس‌های  $(\sim)$ ،  $(-)$  و  $(*)$ ، شکل نهایی دستگاه معادلات حاکم در فضای دو بعدی را بصورت زیر می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + \frac{\partial G_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{برای } j=1,2 \quad (۲-۵۵)$$

که

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{bmatrix} \dots; \dots; F_j = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + p \delta_{1j} \\ \rho u_2 u_j + p \delta_{2j} \\ (\rho E + p) u_j \end{bmatrix} \dots; \dots; G_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ u_i \tau_{ij} - q_j + D_{kj} \end{bmatrix} \quad (۲-۵۶)$$

که

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^l + \tau_{ij}^k \quad (۲-۵۷)$$

$$D_{kj} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2-58)$$

می باشد.

### ۲-۳ مدل‌سازی آشفته‌گی

مدلسازی آشفته‌گی به مدل‌سازی ریاضی اتلاق می‌گردد که مقادیر تنش‌های ظاهری پدیدار شده در معادلات متوسط زمانی رینولدز، را بنحوی مدل کند که مستقیماً در این معادلات قابل جایگذاری و استفاده باشد. به عبارت دیگر این اصطلاح تنها در رابطه با فرض تفکیک بودن متغیرهای جریان به مقادیر متوسط و اغتشاشات کاربرد دارد. در مورد سایر روشهایی که بدون استفاده از معادلات متوسط زمانی رینولدز، جریان آشفته را مدل می‌کند عموماً لفظ شبیه‌سازی بکار می‌رود. مانند شبیه‌سازی مستقیم و یا شبیه‌سازی گردابه‌ای بزرگ که در این تحقیق به تشریح گروه اول پرداخته شده است.

#### ۲-۳-۱ مفاهیم پایه و خصوصیات جریان آشفته

اغتشاش پدیده مهمی است که در یک میدان جریان ممکن است ظاهر شود. بیشتر سعی بر اینست که جنبه‌های مختلف جریان مغشوش به اختصار شرح داده و مفاهیم پایه جریان بررسی شود.

##### ۲-۳-۱-۱ مفاهیم پایه

در بیشتر جریانهای با رینولدز بالا، اثر نیروهای لزجت به ناحیه نزدیک سطح محدود می‌شود. این ناحیه را لایه مرزی می‌نامند. از مبانی درس مکانیک سیالات می‌دانیم که لایه مرزی معمولاً از یک دسته خطوط جریان خوش رفتار آغاز می‌شود و اختلال سیال در سطح میکروسکوپی صورت

می‌گیرد. چنین لایه‌ مرزی را لایه‌ مرزی آرام می‌نامند. به علت شرایط ناشی از شکل هندسی و میدان جریان، مانند زبری سطح، تزریق به سطح و گرادیان فشار، اختلال سیال به سطح ماکروسکوپی افزایش می‌یابد و خطوط جریان، دیگر خوش ترکیب نیستند. این نوع جریان را جریان مغشوش می‌نامند. ناحیه‌ گذرای هم بین لایه‌ های مرزی آرام و مغشوش وجود دارد که به آن ناحیه‌ گذرا می‌گوییم. لایه‌ های مرزی مختلف در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.

در نتیجه اختلال شدید سیال در لایه‌ مرزی مغشوش و شار مومنتم بزرگ مربوط به آن، پروفیل سرعت در ناحیه‌ مغشوش پهن‌تر از پروفیل مربوط در ناحیه‌ آرام است، یعنی، گرادیان سرعت نزدیک دیوار در لایه‌ مرزی مغشوش بزرگتر از مقدار آن در لایه‌ مرزی آرام است. نمونه‌ای از پروفیل‌های سرعت لایه‌ مرزی آرام و مغشوش در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.

به علاوه، لایه مرزی را به لایه مرزی سرعت و لایه‌ مرزی حرارتی دسته‌بندی می‌کنیم. در اغلب مسائل ضخامت لایه‌ مرزی سرعت و لایه‌ مرزی حرارتی یکسان نیست. در شکل (۲-۴) نمونه‌ای از لایه‌ های مرزی سرعت و حرارتی نشان داده شده است. یادآور می‌شویم که پیشتر، پارامتر بی‌بعدی عدد پرانتل معرفی کردیم که از رابطه‌ زیر بدست می‌آید.

$$\text{Pr} = \frac{v}{a} = \frac{\mu C_p}{k} \quad (۲-۵۹)$$

این پارامتر نسبت انتقال مومنتم به انتقال حرارت در جریان را نشان می‌دهد. از این رو می‌توان آنرا بصورت ضخامت لایه‌ مرزی سرعت به لایه‌ مرزی حرارتی تعبیر کرد. شکل (۲-۵) این رابطه را نشان می‌دهد. اگر  $\delta_t$  و  $\delta$  برای نشان دادن ضخامت لایه‌ های مرزی سرعت و حرارت به کار روند، خواهیم داشت:

$$\delta_t > \delta \quad , \quad \text{Pr} < 1$$

$$\delta_t = \delta \quad , \quad \text{Pr} = 1$$

$$\delta_t < \delta \quad , \quad \text{Pr} > 1$$



## ۲-۱-۳-۲ خصوصیات جریان سیال

برای پیدایش آشفستگی در یک میدان جریان ممکن است عوامل گوناگونی تأثیر گذار باشند که بعضی از پارامترهای مؤثر در پیدایش گردابه‌ای عبارتست از:

-لزجت ملکولی

-عدد ماخ بالا

-تغییرات زیاد گردابه‌ای

-میدان نیروهای خارجی مانند شناوری و یا نیروی هیدرومغناطیسی

تأثیر لزجت ملکولی بر روی لایه مرزی در نزدیک دیواره و در لایه آرام زیرین<sup>۱</sup> بسیار مشخص است. در اعداد ماخ بیشتر از ۵ اثرات نوسانات چگالی بسیار حائز اهمیت می‌شود. احتراق قادر به ایجاد گردابه‌ای خاص جریانی است و این تغییرات زیاد ادیها در ساختمان موضعی آشفستگی تأثیر بسیار زیادی می‌گذارد. اثرات شناوری و یا نیروی هیدرومغناطیسی در سیالات خاص نیز نیز تأثیر مهمی در شکل‌گیری جریان خواهد داشت و می‌تواند ضخامت لایه مرزی را تغییر دهد [۱۲].

با ظهور آشفستگی در میدان جریان پدیده‌های فیزیکی مختلفی تحت تأثیر آشفستگی جریان قرار می‌گیرند که مهمترین آنها عبارتست از:

-انتقال مومنتم اصلی

-انتقال حرارت

-اضمحلال نوسانی حرارتی

-عکس العمل‌های شیمیایی

-سقوط تبخیر

<sup>۱</sup>-Sub Laier

علاوه بر اینها جریانهای آشفته نیز مانند سایر پدیده‌های فیزیکی خصوصیات منحصر به خود را دارد که از جمله آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

-جریانهای آشفته همواره سه بعدی هستند

-آشفستگی مثال بارزی از سیستمهای بشدت غیر خطی است

-آشفستگی پدیده‌ای همواره ناپایا است

-جریانهای آشفته همواره در رینولدزهای بالا پدیدار می‌شود

-آشفستگی از خصوصیات جریان است نه از خصوصیات سیال

مطالب یاد شده مختصری راجع به مفهوم جریان آشفته و خصوصیات آن است. مطالب جامع راجع به این مطلب در مراجع [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] آورده شده است.

## ۲-۳-۲ انواع مدل‌های آشفستگی

همانگونه که پیشتر بدان اشاره شد انواع مدل‌های آشفستگی بمنظور محاسبه تنشهای رینولدز توسعه یافته است. سئوالی که می‌توان مطرح نمود اینست که چگونه یک مدل آشفته ساخته می‌شود؟ پاسخی که در جواب این پرسش می‌توان داد اینست که در هر مدل جریان آشفته تعدادی پارامتر مؤثر بر جریان تعریف می‌شود که بسته به نوع مدل، این پارامترها بایستی از یکی از روشهای جبری و یا از طریق معادلات دیفرانسیل محاسبه گردند و به کمک آنها معادلات حاکم بر جریان آشفته حل شود.

در جریان آشفته لزجت کل برابر با لزجت ملکولی  $\mu$  بعلاوه لزجت گردابه‌ای  $\mu_t$  ،  
( $\mu_{tot} = \mu + \mu_t$ ) می‌باشد. مدل‌های آشفستگی که از انواع معادلات ریاضی هستند تنها لزجت گردابه‌ای را مدلسازی و محاسبه می‌کنند. مدل‌های ریاضی برای محاسبه لزجت گردابه‌ای را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد.

- مدلهای جبری برای محاسبه لزجت گردابه‌ای
  - مدلهای دیفرانسیلی برای محاسبه لزجت آشفستگی
  - مدلهای دیفرانسیلی برای محاسبه تنشهای برشی
  - مدلهای مرسوم به تشابه/ادیهای بزرگ که بر اساس تنشهای رینولدز نمی‌باشد.
- بطور کلی یک مدل خوب آشفستگی باید حداقل شش شرط زیر را داشته باشد تا بتوان آنرا مدل مفیدی خواند. این شش شرط عبارتست از:
- گستره عملکرد آن مناسب باشد.
  - ثابتهایی که در اصل استفاده شده است باید ثابتهای مرسوم باشد.
  - تعداد معادلاتی که مدل به معادلات جریان استفاده می‌کند باید حداقل باشد.
  - پاسخهای آن قابل قبول باشد (انطباق تئوری با آزمایش).
  - از جهت دقت کامپیوتر و نیروی فکر اقتصادی باشد.
  - بطور کلی ساده باشد.
- یک طراح باید در انتخاب مدل آشفستگی شرائط بالا را در نظر داشته باشد و باید توجه داشته باشد که با بالا رفتن دقت معمولاً مدلها پیچیده‌تر می‌شوند و در نهایت سادگی و اقتصادی بودن خود را از دست می‌دهند.

### مفهوم لزجت گردابه‌ای

در فصل قبل یادآوری شده است که ترمهای افزوده شده به دستگاه معادلات حل جریان با عنوان تنشهای برشی رینولدز شناخته شده است که برای محاسبه آن به مدل‌های آشفستگی نیاز است. نخستین تلاش جهت ارتباط این ترمها در جریان آشفته و اثرات جریان توسط بوزینسک در سال ۱۸۷۷ صورت پذیرفت. بوزینسک فرض نمود که:

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-60)$$

که در آن  $\mu_t$  لزجت گردابه‌ای و یا لزجت ظاهری آشفته‌گی بوده و به موقعیت نقطه مورد مطالعه بستگی دارد. به این معنی که خاصیت سیال نیست و از خصوصیات جریان می‌باشد. بعدها این فرض اولیه بوزینسک پایه بسیاری از مدل‌های آشفته‌گی گشت. اگر چه خود بوزینسک مدلی برای محاسبه لزجت گردابه‌ای ارائه نداد و فعالیت وی در همین حد باقی ماند.

### ۱-۲-۲-۲ برخی مدل‌های جبری برای محاسبه لزجت گردابه‌ای

#### مدل طول تداخل پراتل

این مدل که مدل بسیار ساده‌ای برای یافتن لزجت گردابه‌ای می‌باشد بر اساس رابطه زیر می‌باشد.

$$\mu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \quad (2-61)$$

که  $l_m$  از یکسری روابط جبری بدست می‌آید [۱۲] و [۱۳].

#### مدل جبری فون کارمن

این مدل همانند مدل پراتل است و تنها تفاوت این مدل با مدل فوق در یافتن  $l_m$  که از رابطه زیر محاسبه می‌شود، می‌باشد [۱۲].

$$l_m \alpha \left| \frac{\partial u / \partial y}{\partial^2 u / \partial y^2} \right| \quad (2-62)$$

### فرض لزجت گردابه ای

در این حالت  $\mu_t = f u_e y_e F(y/s)$  است که در آن  $u_e$  و  $y_e$  اندازه سرعت در طول می‌باشد. در این مدل هر گروهی مقادیر خاصی برای  $u_e$  و  $y_e$  پیشنهاد می‌کنند و بر اساس آنها ترمهای  $F(y/s)$  را محاسبه می‌کند که روش محاسبه آن بسیار پیچیده و خارج از این مقوله می‌باشد [۱۲].

### ۲-۲-۳-۲ بعضی از مدل‌های دیفرانسیلی برای لزجت آشفته

مدل‌های دیفرانسیلی آشفته به معادلات دیفرانسیلی انتقال گفته می‌شود که در ادامه به بعضی از آنها بطور مختصر اشاره شده است [۱۲].

#### مدل پرائتل

در این مدل لزجت گردابه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\mu_t = f \sqrt{x} L \quad (۲-۶۳)$$

در این مدل  $L$  بوسیله معادلات جبری و  $k$  بوسیله معادلات دیفرانسیلی انتقال محاسبه می‌گردد.

#### مدل نی-کوازنی

همانند بالا  $\mu_t$  از معادلات دیفرانسیلی محاسبه می‌شود و اندازه طولی که در معادلات  $\mu_t$  موجود است، بوسیله روابط جبری محاسبه می‌شود. تنش برشی نیز از طریق محاسبه  $\mu_t$  بدست می‌آید.

#### مدل کولموگرف

معادله انتقال این مدل بصورت زیر است.

$$\mu_t = \rho k / f \quad (2-64)$$

که  $f$  و  $k$  بصورت معادلات دیفرانسیلی انتقال بیان می‌شود. این مدل از مدل‌های دو معادله‌ای می‌باشد که بصورت کلی  $K^m L^n$  بیان می‌شود. توضیحات بیشتر در مورد این مدل‌ها در مرجع [۱۲] آمده است.

### مدل‌های انتقال تنش

مدل‌های انتقال تنش بمنظور محاسبه تنش‌های رینولدز که بر اساس تئوری‌های تنش توسعه یافته اند، بکار می‌روند. بطور خلاصه تئوری‌های تنش را می‌توان به سه دسته زیر تقسیم کرد:

۱- تئوری تنش بر اساس تشابه با جریان آرام

۲- ارتباط مستقیم تنش برشی با خواص جریان نظیر  $K$  و  $L$

۳- ظاهر شدن تنش برشی بصورت مستقیم در معادلات دیفرانسیلی انتقال

بعضی از مدل‌های انتقال تنش عبارتست از:

### مدل برادشاو

این مدل بر اساس رابطه زیر بوجود آمده است.

$$\tau = \rho k \quad (2-65)$$

چون در بررسی معادلات آشفتگی عموماً میزان  $\tau$  مدنظر است، به نظر می‌رسد که این راه یک روش مستقیم دستیابی به هدف است. در این مدل  $k$  و  $\tau$  از طریق معادلات دیفرانسیل انتقال محاسبه می‌گردند و مقدار  $L$  که در معادلات مربوط به  $k$  ظاهر می‌گردد، بوسیله معادلات جبری محاسبه می‌شود.

## مدلهای بسیار پیشرفته

در این مدلها سعی شده است که حتی‌المقدور علاوه بر متغیرهایی که قبلاً مورد توجه قرار گرفته است، تمامی عوامل مؤثر در آشفستگی مورد توجه قرار گیرد. لذا علاوه بر  $\tau$  و  $L$  از متوسط مربع نوسانات در تمامی مؤلفه‌ها در معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. در بعضی از مدلها علاوه بر ترم‌های فوق از مؤلفه‌های سه‌گانه نوسانات سرعت نیز استفاده شده است [۱۲].

## ۳-۲-۲-۳ مقایسه بین مدل‌های آشفستگی

تعداد معادلات دیفرانسیل بیانگر نوع مدل آشفستگی است. همانطور که پیشتر اشاره شده است مدل‌هایی که فاقد هر نوع معادله دیفرانسیلی می‌باشد با عنوان مدل جبری شناخته می‌شود. مدل‌هایی که دارای یک معادله دیفرانسیلی هستند در گروه مدل‌های یک معادله‌ای قرار می‌گیرند و در نهایت مدل‌هایی که دارای دو معادله هستند مدل‌های دو معادله‌ای هستند. البته مدل‌هایی وجود دارد که بیش از دو معادله دیفرانسیلی را در خود جای داده اند که در جدول زیر به بعضی از آنها اشاره شده است.

در مدل‌های جبری آشفستگی معادله دیفرانسیل ظاهر نمی‌شود. بهترین نمونه این نوع مدلها مدل طول تداخل پرانتل است که کاربرد بسیار گسترده‌ای دارد. مدل انرژی پرانتل نیز که از طریق حل معادلات انتقال بیان می‌گردد، یک مدل یک معادله‌ای مناسب در زمان خود بود و بهمین شکل مدل دو معادله‌ای کولموگروف نیز مدلی مناسب بود.

جدول ۲-۱ معرفی مدل‌های آشفستگی از لحاظ تعداد معادلات [۱۲].

تعداد معادله (حداکثر)	تعداد معادله (حداقل)	محقق
۰	۰	پرانتل (۱۹۲۵)
۱	۱	پرانتل (۱۹۴۵)
۱	۱	نی-کوازنی (۱۹۶۸)

-	۱	براد شاو(۱۹۶۷)
۲	۲	کولموگروف(۱۹۴۲)
-	۳	هانز الیک(۱۹۷۰)
۷	۵	روها(۱۹۵۱)
۱۷	۹	چو(۱۹۴۵)
۲۳	۱۰	دیویدوف(۱۹۶۱)
۲۸	۲۰	کولاوادین(۱۹۶۹)

بدیهی است که با بالا رفتن تعداد معادلات، وقت و هزینه بیشتری باید جهت حل هر مدل صرف نمود. بهر صورت با توجه به جدول (۱-۲) مشخص است که مدلها از بالا به پایین پیچیده‌تر می‌شود و این مهم به آن مفهوم است که جهت حل و بررسی آنها به دقت بیشتری نیاز است. در مورد ستون‌هایی که با عنوان حداقل و حداکثر تقسیم‌بندی شده است باید خاطر نشان کرد که سمت چپ بیانگر تعداد معادلات لازم برای صفحه است و در سمت راست تعداد معادلات لازم در فضا آمده است. همچنین در مورد مدل‌هایی که در سمت راست آنها علامت (-) گذاشته شده است به مفهوم آنست که فقط بر روی صفحه کاربرد دارند و مدل‌هایی که در هر دو طرف یک عدد است جزو مدل‌های اسکالر است [۱۲].

علاوه بر مدل‌های یاد شده مدل‌های جدید یک معادله‌ای و دو معادله‌ای توسعه یافته‌اند. مدل‌های دو معادله‌ای همچون  $k\varepsilon, k\omega, q\omega$  و  $k\zeta$ ، که کاربرد بسیاری در مسائل مهندسی دارند و روز به روز بهینه یافته‌اند. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مراجع [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] مراجعه نمود.

### ۳-۳-۲ مدل‌های یک معادله‌ای



همانطور که اشاره شد جابجائی اغتشاش در مدل صفر معادله‌ای منظور نمی‌شود. از اینرو اثر فیزیکی تاریخچه قبلی جریان وارد مدل‌های ساده جبری نمی‌شود. برای در نظر گرفتن این اثر فیزیکی، معادله انتقالی را بر اساس معادله ناور-استوکس می‌توان نوشت. هر گاه یک معادله دیفرانسیل از این نوع بکار رود، مدل را یک معادله‌ای می‌نامند. نمونه‌هایی از این مدل‌ها را برای توضیح دادن ویژگی آنها در اینجا ارائه می‌کنیم.

معادله دیفرانسیلی برای انرژی جنبشی اغتشاش (k) چنین است:

$$k = \frac{1}{2} \left[ \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right] \quad (2-66)$$

که معادله دیفرانسیل پاره ای حاکم را بصورت زیر می‌توان نوشت.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{\rho' u'_j} \right] \quad (2-67)$$

و

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (2-68)$$

ترمهای معادله بالا، هر کدام به نوعی بیانگر پدیده‌هایی هستند که بر انرژی جنبشی اغتشاشی (k) اثر می‌گذارند. مثلاً ترم اول و دوم جابجایی اغتشاشی (انرژی جنبشی اغتشاش)، ترم سوم نرخ تولید اغتشاش (انرژی جنبشی اغتشاش) از جریان اصلی، ترم چهارم مطابق با نفوذ مولکولی از یک لایه به لایه دیگر، ترم پنجم اثر انتقال مطابق بر روی انرژی جنبشی اغتشاش، ترم ششم اثر میدان فشار و میدان سرعت بر انرژی جنبشی اغتشاش و هفتم معادله، نرخ از بین رفتن انرژی جنبشی اغتشاش و تبدیل آن به انرژی گرمایی را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌کنید، ترمهای ۳، ۵، ۶ و ۷ همواره مجهول هستند در حالیکه آنچه تا این مرحله ارائه شد، معرفی ترمهای جدید است و موضوع اصلی، یعنی تکمیل معادلات هنوز پابرجاست. زیرا مجهول اضافی وجود دارد که در غالب ترمهای یاد شده ظاهر شده است. قابل توجه است که بمنظور نوشتن

روابط برای ترمهای جدید نیاز به نتایج تجربی شدیداً احساس می‌شود. مدل‌های معمول همگی از فرضیه لزجت گردابه‌ای استفاده می‌کنند. همانطور که در فصل قبل به آن اشاره شده است تانسور تنشهای مغشوش را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\bar{\tau}_{ij}^l = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2-69)$$

در این قسمت از تشابه انتقال مولکولها و ادیهای موجود در جریان مغشوش استفاده می‌شود. بنابراین می‌توان رفتار مولکولها را به جریان مغشوش تعمیم داده و ترم پنجم معادله را تقریب زد. اما بدلیل کمبود اطلاعات در مورد اثرات میدان فشار بر جریان تقریب خوبی برای ترم ششم نمی‌توان بدست آورد. خوشبختانه نتایج اخیر حل معادلات بروش DNS (منصور، کیم و معین (۱۹۸۸)) برای جریانهای ساده نشان می‌دهد که ترم ششم مقدارش ناچیز بوده بطوریکه می‌توان اثر آنرا در ترم پنجم ادغام نمود و می‌توان آنها را بصورت ریاضی زیر زیر نوشت [۱۳].

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} + \overline{\rho' u'_j} = -\frac{\mu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2-70)$$

که  $\sigma_k$  در سال ۱۹۹۲ توسط برادشاو برای کلیه جریانهای مغشوش محاسبه شده است. ثابت  $\sigma_k$  را معمولاً معادل یک در نظر می‌گیرند. تیلور نیز در سال ۱۹۳۵ تقریبی برای ترم اتلاف انرژی جنبشی اغتشاش ارائه داد که بصورت زیر بیان شده است.

$$\varepsilon \approx k^{3/2} / l \quad (2-71)$$

لزجت آشفته نیز بارابطة زیر به انرژی جنبشی اغتشاش مربوط می‌شود.

$$\mu_t = \text{const.} \cdot \rho k^{1/2} l \quad (2-72)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۶۹)، (۲-۷۰) و (۲-۷۱) در معادله (۲-۶۷) داریم:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \mu_t / \sigma_k \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - C_D \rho \frac{k^{3/2}}{l} \quad (2-73)$$

بنابراین معادله دیفرانسیلی پاره‌ای حاکم را اینچنین بازنویسی می‌کنیم.

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \mu_t \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \quad (2-74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - C_D \rho \frac{k^{3/2}}{l}$$

و

$$\mu_t = \rho k^{1/2} l \quad (2-75)$$

عموماً، اغلب مدل‌ها ناحیه‌های داخلی و خارجی را برای نشان دادن اختلاط ارائه می‌کنند. چنانچه  $l$ ، همان طول اختلاط پراتل باشد، واضح است که پس از تعیین مقادیر موضعی انرژی جنبشی اغتشاش،  $k(y=y_i)$  و نرخ از بین رفتن آن، لزجت اغتشاش را از معادله (2-75) می‌توان تعیین کرد. سپس عبارت نوسانی  $\overline{u'v'}$  قابل محاسبه می‌شود [34].

با بازگشت به معادلات متوسط زمانی رینولدز در فصل قبل، ملاحظه می‌شود که جمله‌های اضافی همانند  $\overline{u'^2}$  و  $\overline{v'^2}$  در این معادله ظاهر می‌شود. این مقادیر را نیز با روابط نیمه تجربی می‌توان مشخص نمود. بعنوان مثال در حالت دو بعدی داریم:

$$\overline{u'^2} = \text{const} \cdot k \quad (2-76)$$

$$\overline{v'^2} = \text{const} \cdot k \quad (2-77)$$

### ۱-۳-۲ مدل یک معادله‌ای پراتل

تجارب بیست ساله پراتل گویای این حقیقت است که چنانچه نرخ اتلاف انرژی جنبشی آشفستگی و نرخ تولید آن یکسان باشد، طول مقیاس  $l$  در رابطه (2-74) را می‌توان معادل طول مخلوط در مدل جبری در نظر گرفت. بنابراین در یک جریان برشی نازک می‌توان نشان داد که

$$\text{عبارت } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(-u'v')^{1/2}}{l_{mix}} \text{ نرخ تولید، با } \xi = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \text{ نرخ اتلاف، یکسان است.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(-u'v')^{1/2}}{l_{mix}} = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (2-78)$$

و به این ترتیب، چون  $l = l_{mix}$  است، رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{u'v'}{k} = const \quad (2-79)$$

معادله (۲-۷۳) با احتساب تقریبهای موجود در معادلات (۲-۷۵) و (۲-۷۹)، بعنوان اولین مدل یک معادله‌ای در سال ۱۹۴۵ منتشر شد.

### ۲-۳-۳-۲ مدل گلاشکو-امونز<sup>۱</sup>

در سال ۱۹۵۴ امونز مدلی مشابه مدل پرانتل ارائه داد و بکمک گلاشکو، در سال ۱۹۶۵ مقادیر ثابتی را برای رژیمهای مختلف جریان، یعنی ناحیه‌های داخلی و خارجی مشخص نمود [۱۲]. این ثابتها عبارتند از:

$$\sigma_k = 1.0; \dots; 0.07 < C_D < 0.09; \dots; l = l_{mix}$$

### ۲-۳-۳-۳ مدل ولف-شاتین<sup>۱</sup>

در این مدل از یک تابع نمایی استهلاک برای ترم اتلاف استفاده می‌شود و لزجت آشفته تقریباً همان مقداری است که ون دریش<sup>۲</sup> ارائه داد. لازم بذکر است که این مدل برای اعداد رینولدز پایین بخوبی کار می‌کند [۱۲].

### ۲-۳-۳-۴ مدل برادشاو<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> - Glushko-Emmons  
<sup>۱</sup> - Wolf Shotein  
<sup>۲</sup> - Van Dirisht  
<sup>۳</sup> - Bradshaw

در سال ۱۹۶۷ اتول<sup>۴</sup>، فریس<sup>۵</sup> و برادشاو یک مدل یک معادله‌ای ارائه دادند که برای تقریب ترم پنجم و ششم معادله (۲-۶۷) از فرض تشابه جریان آرام و مغشوش استفاده نکردند. در عوض مقدار تنش برشی و انرژی جنبشی را بصورت زیر پیشنهاد کردند [۱۲] و [۱۳].

$$\tau_{xy} \approx 0.3k \quad (2-80)$$

همچنین آنها مدل دیگری را طراحی کردند که در آن طول اختلاط همانند قبل برای هر دو ناحیه داخلی و خارجی محاسبه شده است، تنها با این تفاوت که بجای استفاده از لایه مرزی سهموی از لایه مرزی هذلولوی شکل استفاده کردند. بسادگی می‌توان این مدل را از طریق روش مشخصه‌ها حل کرد. شکل (۲-۶) نتیجه حل مدل یک معادله‌ای فوق و توزیع اصطکاک سطحی در لایه مرزی مغشوش را نشان می‌دهد.

با مقایسه مدل (۱-۲) با مدل (۲-۷) مشخص می‌شود که مدل برادشاو و همکارانش در مقایسه با مدل سبسی و اسمیت و مدل بالدوین لومکس خطای کمتری دارد. همچنین تفاوت تئوری و آزمایش حداقل است.

### ۵-۳-۲ مدل بالدوین-بارث<sup>۱</sup>

در سال ۱۹۹۰ بالدوین و بارث مدلی بر اساس معادله انتقال لزجت مغشوش بدست آوردند. مدل فوق دارای هفت ضریب ثابت است. آنها به کمک نتایج آزمایشگاهی تابعی برای طول مقیاس ۱ و دو تابع استهلاک تجربی برای ترم اتلاف بیان کردند. معادلات این مدل عبارتست از:

$$v_t = C_\mu v \tilde{R}_t D_1 D_2 \quad (2-81)$$

که R متغیر وابسته است و معادله انتقال آن بصورت زیر است:

<sup>۴</sup> - Atwell

<sup>۵</sup> - ferris

<sup>۱</sup> - Baldwin-Barth

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{v}\tilde{R}_t) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{v}\tilde{R}_t) = (C_2 f_2 - C_3) \sqrt{\tilde{v}\tilde{R}_t P} +$$

$$(v + v_t / \sigma_t) \frac{\partial^2(\tilde{v}\tilde{R}_t)}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial v_t}{\partial x_k} \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{R}_t)}{\partial x_k} \quad (2-82)$$

و ثابتها نیز از قرار زیر هستند:

$$C_{01} = 1.2 \dots; \dots C_{02} = 2.0 \dots; \dots C_\mu = 0.09 \dots; \dots A_0^+ = 26$$

$$A_2^+ = 10 \dots; \dots k = 0.41 \dots; \dots \frac{1}{\sigma_t} = (C_{0.2} - C_{01}) \sqrt{C_\mu / k^2} \quad (2-83)$$

و معادله کمکی نیز بصورت زیر است:

$$P = v_t \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right]$$

$$D_1 = 1 - e^{-y^+ / A_0^+} \dots; \dots D_2 = 1 - e^{-y^+ / A_2^+}$$

و همچنین داریم:

$$f_2 = \frac{C_{01}}{C_{02}} + \left( 1 - \frac{C_{01}}{C_{02}} \right) \left( \frac{1}{ky^+} + D_1 D_2 \right) \times$$

$$\left[ \sqrt{D_1 D_2} + \frac{y^+}{\sqrt{D_1 D_2}} \left( \frac{D_2}{A_0^+} e^{-y^+ / A_0^+} + \frac{D_1}{A_2^+} e^{-y^+ / A_2^+} \right) \right] \quad (2-85)$$

شکل (۲-۹) نشان می‌دهد که مدل بالدوین-بارث در جریانهای با گرادیان فشار ثابت و در اعداد ماخ ۰/۱ در مقایسه با تئوری، دقت فوق العاده‌ای دارد. همچنین این شکل درصد افزایش خطا و کاهش توزیع اصطکاک سطحی در عدد ماخ بالاتر را نیز ارائه می‌کند.

### ۲-۳-۳-۶ مدل اسپالارت-آلماراس

بر خلاف مدل‌های آشفتگی پیشین، پاسخهای این مدل آشفتگی محلی است (یعنی اینکه حل معادله در یک نقطه هیچ ربطی به حل نقاط دیگر ندارد) و بنابراین با انواع شبکه‌های دامنه محاسباتی معادله ناویر-استوکس بصورت باسازمان و یا بی‌سازمان در فضاهای دو و سه بعدی

سازگار است. پاسخهای این مدل با سرعت نسبتاً خوبی برای حالت پایا همگرا می‌شوند. همچنین اعمال شرائط مرزی دیواره و جریان آزاد در این مدل ناچیز است. پاسخهای مدل در نقطه‌ای که بوسیله کاربر مشخص می‌شود، انتقال آرام به آشفته‌گی نسبتاً همواری دارد. همچنین این مدل از توانایی کافی برای کالیبره شدن روی لایه‌های ترکیبی دو بعدی، دنباله‌ها و لایه‌های مرزی صفحه تخت که برای ساختن بلاکهایی برای حل جریانهای آئرودینامیک در نظر گرفته شده است، برخوردار می‌باشد. پاسخهای این مدل بطور رضایت بخشی گرادیان فشار در لایه مرزی را پیشگویی می‌کند. در اینجا حل عددی در حالت‌های دو بعدی و پایدار کاملاً تشریح شده است. حالت‌های مختلف موجود در دو بعد شامل جدایی شاک القاء شده و لبه فرار پخ شده، می‌باشد. نتایج بدست آمده در نزدیکی دنباله رضایت بخش است و بعنوان کاندیدای خوب برای جریانهای پیچیده‌تر همچون سیستمهای برازا یا اتصال بال و بدنه ظاهر شده است. اما بهر صورت واضح نیست که حل پایدار برای چنین جریانهایی را می‌توان بدست آورد یا خیر؟

### تولید و کالیبره کردن مدل

برای بدست آوردن این مدل، از یک مدل یک معادله‌ای بسیار ساده برای کاربرد در جریانهای برشی آزاد تا پیچیده‌ترین معادله برای حالت جریانهای لزج گذرنده از بدنه‌های جامد و با نواحی آرام استفاده شده است. در حالیکه هر اثر فیزیکی که به میدان جریان اضافه می‌شود، ترمهای جدیدی نیز به مدل اضافه شده و کالیبره می‌شود. این ترمها بوسیله زیرنویس‌های مشترک در ثابتها و توابع درگیر (یعنی از ثابت  $C_{b1}$  تا تابع  $f_{v2}$ ) مشخص شده‌اند. قابل توجه است که ثابتها بطوری بی‌بعد شده‌اند که توابع از درجه ۱ باشد. ترمهای جدید اضافه شده در تمامی نمونه‌های پائین‌تر این مدل، بدلیل اینکه مقاومت کمتری دارند اغلب باید کالیبره شوند. این کار ممکن است مشکل به نظر برسد ولی می‌تواند آموزنده باشد. چراکه به دانش پژوهان اجازه می‌دهد تا تئوری یا

کالیبراسیون لایه به لایه را مورد بررسی قرار دهند و برای حالاتی که در نظر گرفته‌اند آزمایش کنند. همچنین این موضوع باعث می‌شود که بعضی از بدیهیات در تغییرات بعدی مدل حفظ شود.

### روابط تشکیل دهنده

همانطور که قبلاً اشاره شد متغیر مورد نظر برای حل مدل آشفتگی، لزجت گردابه‌ای است. تنش‌های رینولدز بوسیله رابطه  $- \overline{u_i u_j} = 2\nu_t S_{ij}$  به لزجت گردابه‌ای وابسته شده است که  $S_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  تانسور نرخ کرنش می‌باشد. در مقایسه با مدل‌های دو معادله‌ای طبیعتاً ترم  $k$  (انرژی جنبشی مغشوش) محاسبه نمی‌شود. این نقصان تاثیر زیادی در جریانهای برشی نازک نخواهد داشت و همچنین افزایش  $2k/3$  به آرایه‌های قطری تانسور تنش در هر حالتی تقریب زده می‌شود. توجه داشته باشید که حتی در مدل‌های دو معادله‌ای بخاطر مفهوم  $k$  و همچنین بخاطر معادله  $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$  حتی با مقادیر صحیح  $k, \varepsilon$ ، لزجت گردابه‌ای بطور کاملاً صحیح در لایه لگاریتمی محاسبه نمی‌شود. این انتقاد بر اساس روشهای تجربی و نتایج حل مستقیم DNS ایراد شده است [۲۰]. در مدل‌های یک معادله‌ای یا مدل‌های دیگر (مدلهای صفر معادله‌ای) که  $\nu_t$  بجای  $k$  محاسبه می‌شود، می‌توان  $k$  را متناسب با تنشهای محاسبه شده بوسیله  $\nu_t S_{ij}$ ، بطور رضایت بخشی تقریب زد.

از آنجایی که هیچ معادله انتقال دقیقی برای محاسبه  $\nu_t$  وجود ندارد، در این مدل تقریب ترم به ترم و با استفاده از کارهای تجربی مد نظر قرار گرفته است و حتی از فرایندهای کلاسیک ساختن و کالیبره کردن مدل در جریانهای آشفته همگن، پیروی نشده است. این مهم بخاطر اینست که مدل ابتدائی با یک معادله، بقدری ساده است که خودبخود به رفتار آشفتگی همگن می‌رسد و همچنین بخاطر تاکید سازندگان این مدل به جریانهای واقعی آئرو دینامیکی و علاقه اندک آنها به جریانهای آشفته همگن می‌باشد. اسپالارت و آلماراس با گردآوری مقادیر بر گرفته از



میدان جریان متوسط و  $v_t$  که ثابت گالیلین را به‌مراه دارد، این مدل را بوجود آوردند. آنها همچنین جریانهای برشی آزاد در رینولندهای بالا که بواسطه آن لزجت مولکولی نقش تاثیر پذیری در معادله انتقال نخواهد داشت را در نظر گرفتند و دلیل آنها برای این فرض اینست که در چنین جریانهایی، اطلاعات و همچنین انرژی، از گردابه‌های بزرگ به گردابه‌های کوچک منتقل می‌شود. بطور کلی سمت چپ معادله، مربوط به مشتقات کلی یا لاگرانژی از  $v_t$  بگونه زیر است.

$$\frac{Dv_t}{Dt} = \frac{\partial v_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_t}{\partial x_i} \quad (2-86)$$

که در سمت راست معادله یک ترم تولید و یک ترم انتشار وجود دارد. برای ترم تولید، تانسور تغییر شکل  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  ظاهر شده است. از آنجایی که  $v_t$  اسکالر است باید از یک ترم اسکالر که S

معرفی شده است، استفاده کرد. همچنین ترمی همانند  $\frac{\partial V}{\partial x}$  (مرج [20]) بخاطر تقلید اثرات انحناء،

خطوط جریان، احتمالاً ثابت نیست. از آن جهت که در این مدل، آشفتگی جایی پدیدار می‌شود که فقط ورتیسیته وجود داشته باشد (که هر دو اثر از مرزهای جامد ناشی می‌شود). از

ورتیسیته ( $\omega \equiv \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ ) که  $\Omega_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ، استفاده شده است. قابل ذکر است که نواحی

همچون شاکها وجود دارد که ورتیسیته بدون آشفتگی در پشت آن وجود دارد. این ورتیسیته

معمولاً ضعیفتر از آن است که بتواند لزجت گردابه‌ای تولید کند. در عین حال حالت‌هایی وجود

دارد که از پارامترهایی همچون نرخ کرنش  $\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  یا ترم تانسوری  $\sqrt{u_{i,j}u_{i,j}}$  بجای  $\omega$

استفاده شده است ولی هنوز هیچ آزمایشی روی این مدل صورت نگرفته است تا بررسی شود که

اختلافی در پاسخها پدیدار می‌شود یا خیر. بطور کلی این مدل تنها برای جریانهای آشفتگی

همگن بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{Dv_t}{Dt} = C_{b1} S v_t \quad (2-87)$$

که زیر نویس b بیانگر basic است. همگرایی پاسخ مدل در جریانهای آشفته همگن، کند است ولی خطای فاحشی تولید نمی‌کند. در این حالت لزجت گردابه‌ای ایستگاهی است ( $Dv_t/Dt=0$ ) می‌باشد چراکه  $S=0$  است). معادل با همین مورد انرژی جنبشی k است که متناسب با  $t^{-6/5}$  می‌باشد. بنابراین ساده‌ترین ترکیبی که ابعادی همچون  $v_t$  را داراست، عبارت  $k^2/\varepsilon$  می‌باشد که  $\varepsilon$  ترم پراکندگی است که به آرامی و متناسب با  $t^{-1/5}$  میرا می‌شود. در جریانهای غیر همگن و با روشی که بستگی به انتخاب S دارد،  $v_t$  تنها تحت اثر ترم تولید افزایش می‌یابد (ممکن است که روش یاد شده بعدها با آزمایشات بیشتر اصلاح شود). اما بهر صورت سازندگان مدل با در نظر گرفتن  $S \equiv |U_y|$  برای جریان برشی، مشاهده کردند که  $v_t$  بصورت توانی (مشابه عبارت  $\exp(C_{b1}St)$ ) رشد می‌کند. این مهم یک رفتار کلاسیک برای جریانهای برشی با نرخ رشد ۰/۱ تا ۰/۱۶ (بر اساس آزمایشات) است. اسپالارت و آلماراس تاکید روی جریانهای آشفته همگن نداشتند اما در عین حال بطور کامل درگیر چالشهای موجود در جریانهای آشفته غیر همگن نیز نشدند. قابل توجه است که مدلهای بالدوین - بارث و سکاندوف دارای ثابتهای تولید به مراتب بزرگتری (حداقل ۲/۰، درمقایسه با  $C_{b1} = 0.13 - 0.14$ ) هستند. همچنین در این مدل هیچ مقدار ثابت و قابل قبولی که بتواند ترم اتلاف را دور از دیواره به درستی بیان کند موجود نیست که در ادامه مطالبی در ارتباط با این موضوع عنوان شده است.

در این مدل تحقیقات مربوط به ترمهای انتشار روی مشتقات ویژه  $v_t$  متمرکز شده است و اپراتورهای کلاسیک انتشار از نوع  $([v_t/\sigma]\nabla v_t)$  با  $\sigma$ ، عدد پراتنل مغشوش می‌باشد. با توجه به موارد گفته شده و پاره‌ای مسائل دیگر (مرجع [۲۰]) معادله (۲-۸۸) پایه این مدل می‌باشد.

$$\frac{Dv_t}{Dt} = C_{b1}Sv_t + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot (v_t \nabla v_t) + C_{b2}(\nabla v_t)^2] \quad (2-88)$$

توضیحات بیشتر در این مورد در مرجع [۲۰] آمده است.

## کالیبره کردن مدل در نزدیکی دیواره با عدد رینولدز بالا

در لایه مرزی لزوم وجود ضریب انسداد<sup>۱</sup> یک دیواره که همچون ترم اتلاف اصلی برای تنش برشی رینولدز عمل می‌کند، احساس می‌شود. در این رابطه یک ترم اتلاف اضافی برای لزجت گردابه‌ای در معادله انتقال پیشنهاد شده است. آنالیز ابعادی ما را برای انتخاب  $C_{w1}(v_t/d)^2$  که  $d$  فاصله تا دیواره است هدایت می‌کند. زیر نویس‌ها بر مبنای wall می‌باشد. این ترم در جریانهای برشی آزاد ( $d \rightarrow \infty$ ) غیر فعال می‌شود و بنابراین تاثیری در کالیبره کردن مدل برای این حالت نخواهد داشت. مدل سکاندوف نیز شامل این ترم است (ولی بهر حال در بیان لزجت و نواحی بیرونی با این مدل سازگار نیست). پس، در نزدیکی دیواره اما غیر لزج در مدل هانت<sup>۱</sup> نیز در نظر گرفته شده است.

اندازه‌های لزجت گردابه‌ای لایه بیرونی با ضخامت لایه مرزی و لزجت گردابه‌ای لایه درونی به وسیله طول تداخل ( $l \propto d$ ) بدست می‌آید. در لایه لگاریتمی کلاسیک با سرعت اصطکاکی  $u_\tau$ ، رابطه‌های  $S = u_\tau / (kd)$  و  $v_t = u_\tau kd$  را داریم. تعادل بین ترمهای انتشار و تولید (که همه مثبت می‌باشند) و ترم اتلاف، ممکن است اینگونه فراهم شود.

$$C_{w1} = C_{b1} / k^2 + (1 + C_{b2}) / \sigma \quad (2-89)$$

آزمایشات نشان می‌دهد، زمانی که مدل به ترم اتلاف مجهز باشد، می‌تواند لایه لگاریتمی دقیقی تولید کند. این مدل در ادامه تشریح شده است. بعبارت دیگر ضریب اصطکاک پوسته بسیار کوچکی در لایه مرزی صفحه صاف وجود دارد. این نشان می‌دهد که ترم اتلاف علاوه آنکه فرموله شده است، با کندی بسیار در ناحیه خارجی لایه مرزی میرا می‌شود. اسپارلات و الماراس برای کالیبره کردن  $C_{w1}$ ، آن را در تابع بدون بعد  $f_{w1}$  که در لایه لگاریتمی برابر با ۱ است،

<sup>۱</sup> - Blocking Effect

<sup>۱</sup> - Hunt

ضرب کردند [۲۰]. همچنین اینکه ما قادر به دستیابی اصطکاک پوسته دقیقی با استفاده از معادله کالیبره شده در حالت جریان برشی آزاد نیستیم. در نهایت مدل بصورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\frac{Dv_t}{Dt} = C_{b1} S v_t + \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot (v_t \nabla v_t) + C_{b2} (\nabla v_t)^2 \right] - C_{w1} f_w \left[ \frac{v_t}{d} \right]^2 \quad (2-90)$$

در این مدل برای انتخاب آرگومان مناسب برای  $f_w$  از مدل‌های جبری که در آن طول تداخل نقش اصلی را در نزدیکی هر دیوار، بازی می‌کند، الهام گرفته شده است. این طول را می‌توان با رابطه  $l = \sqrt{v_t / S}$  تعریف کرد. در این مدل از پارامتر بدون بعد زیر استفاده شده است.

$$r \equiv \frac{v_t}{Sk^2 d^2} \quad (2-91)$$

هر دو پارامتر  $f_w$  و  $r$  در لایه لگاریتمی برابر یک است و در ناحیه بیرونی کاهش می‌یابد. در نهایت معادله (۲-۹۲) بعنوان رابطه مناسب برای  $f_w$  تعریف شده است.

$$f_w(r) = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} \dots; \dots g = r + C_{w2} (r^6 - r) \quad (2-92)$$

نمودار مربوط به این تابع در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. نتایج بدست آمده بشدت به شیب  $f_w$  در  $r=1$  که بوسیله  $C_{w2}$  کنترل می‌شود، وابسته است. عبارت  $g$  تنها محدود کننده‌ای است که از افزایش بی‌رویه مقادیر  $f_w$  که ممکن است حل عددی بوسیله کد کامپیوتری را دچار مشکل کند، جلوگیری می‌کند. ناحیه  $r > 1$  تنها برای گرادینهای فشار معکوس بکار می‌رود و بهمین خاطر است که  $r$  بندرت بیش از ۱/۱ می‌شود.

داشتن  $f_w(0) = 0$  ضروری نیست چرا که در جریانهای برشی آزاد ترم اتلاف بخاطر مقدار  $d^2$  در دامنه محاسباتی صفر می‌شود. مقدار مناسب برای  $C_{w2}$  برابر ۲ در نظر گرفته شده است [۲۰]. عبارت  $C_{w2}$  نیز بمنظور تصحیح ضریب اصطکاک پوسته در لایه مرزی صفحه صاف کالیبره شده است. جزئیات بیشتر در این رابطه در مرجع [۲۰] تشریح شده است.

### کالیبره کردن مدل در نزدیکی دیواره با عدد رینولدز پایین

در لایه بافر<sup>۱</sup> و زیر لایه لزج نوشتار بیشتری مورد نیاز است. بهمین خاطر علاوه بر پارامترهای دیواره  $y^+$  و نظایر آن، پارامترهای دیگری نظیر  $\tilde{v}$  که بجز در ناحیه لزج در نواحی دیگر با  $v_t$  برابر است و همچنین پارامتر  $\chi \equiv \tilde{v}/v$ ، نیز تعریف شده است. در این مدل برای انتخاب مقدار انتقالی  $\tilde{v}$ ، که در نزدیک دیوار رفتار خطی دارد، از مدل بالدوین-بارث پیروی شده است. این مهم برای روشهای مختلف حل عددی مناسب است [۲۰] و بهمین خاطر است که این مدل به سببانی ریزر از سببانی مورد استفاده در مدل جبری احتیاج ندارد [۲۰]. برای رسیدن به این مهم اسپالارت و آلماراس برای مدل خود یک لایه گاریتمی کلاسیک و همچنین یک تابع میرا کننده نزدیک دیواره که با نتایج موجود سازگار است را در نظر گرفتند.

همانطور که می‌دانیم لزجت گردابه‌ای،  $v_t$ ، در لایه لگاریتمی برابر با  $kyu_t$  می‌باشد که در لایه بافر اینچنین نیست. بهمین خاطر اسپالارت و آلماراس با تعریف  $\tilde{v}$  بطوریکه در هر نقطه میدان جریان برابر  $kyu_t$  است، مدل را بطور چشم‌گیری ساده‌تر کردند. رابطه بین  $\tilde{v}$  و  $v_t$  نیز از قرار زیر است.

$$v_t = \tilde{v} f_{v1} \dots \dots \dots f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (۲-۹۳)$$

که رابطه  $f_{v1}$  در واقع برگرفته از مدل ملور و هرنیگ<sup>۱</sup> می‌باشد و زیر نویس  $v$  بیانگر viscous می‌باشد. در این مدل برای ثابت  $C_{v1}$  بجای  $۶/۹$  در مدل مولر و هرنیگ مقدار  $۷/۱$  در نظر گرفته شده است. تابع دیگر تعریف شده در رابطه با  $f_{v1}$  معادله  $f_{v1} = (\sqrt{1 + 4l^{+2}} - 1) / 2\chi$  می‌باشد که در آن  $l^+ = \chi [1 - \exp(-\chi/kA^+)]$  است [۲۰]. همچنین ترم تولید نیز به تغییرات دیگری نیاز

<sup>۱</sup> - Buffer Layer  
<sup>۱</sup> - Nellor and Herring

دارد که از آن جمله می‌توان به جایگذاری  $\tilde{S}$  بجای  $S$  اشاره کرد.  $\tilde{S}$  نیز از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۰].

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{v}}{k^2 d^2} f_{v2} \dots \dots \dots f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 - \chi f_{v1}} \quad (۲-۹۴)$$

تابع  $f_{v2}$  همانند  $f_{v1}$  بدست می‌آید بطوریکه  $\tilde{S}$  رفتار لایه لگاریتمی  $(u_\tau / (k\nu))$  خود را در

تمام نقاط جریان حفظ خواهد کرد. همچنین مقدار  $\tilde{S}$  روی دیواره یکتاست در حالیکه  $\tilde{v}$  در آنجا برابر صفر است و مقدار  $\chi$  نیز در جاییکه  $\tilde{S}$  کمتر از  $S$  است ممکن است منفی شود. این مهم نمی‌تواند تأثیری در آشفته کردن حلهای عددی داشته باشد. پارامتر دیگر درگیر در مدل غیر لزج

$$\tilde{v}, \text{ می‌باشد که جایگزین } \nu \text{ شده است و در معادله } r \equiv \tilde{v} / (\tilde{S} k^2 d^2) \text{ نیز بکار می‌رود.}$$

در نهایت یک ترم انتشار لزج نیز به این مدل اضافه شده است که در روی دیواره از شرط

مرزی دریشه  $\tilde{v} = 0$ ، استفاده می‌کند و شکل نهایی مدل بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} + \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu + \tilde{v}) \nabla \tilde{v}) + C_{b2} (\nabla \nu)^2 \right] - C_{w1} f_w \left[ \frac{\tilde{v}}{d} \right]^2 \quad (۲-۹۵)$$

در رابطه فوق در تمامی نقاطی که  $d = 0$  است، مقدار  $\frac{D\tilde{v}}{Dt}$  برابر صفر می‌باشد. شکل‌های (۲-۱۰) و

(۲-۱۱) بیانگر نتایج بدست آمده از این مدل می‌باشد. بویژه در شکل (۲-۱۱) که لایه‌های بافر و

لزج بطور واضح مشخص شده است.

همچنین با در نظر گرفتن ناحیه انتقال از جریان آزاد به جریان آشفته ترمهای دیگری نیز

به مدل اضافه می‌شود که در اینجا از ارائه جزئیات مربوط به چگونگی کالیبره کردن آن خودداری

شده است و در مرجع [۲۰] مطالب جامعی در این مورد گنجانده شده است.

## شرایط اولیه و مرزی

در جریان آزاد مقدار ایده‌آل برای  $\tilde{v}$ ، صفر می‌باشد. اما بخاطر مسائل حل عددی همچون خطای محاسباتی و یا نظایر آن، برنامه رایانه‌ای نوشته شده با مشکل روبرو نشود از مقدار اولیه  $\tilde{v} = v/10$  استفاده می‌شود. با یادآوری رابطه  $f_{v1}$  می‌توان به این نتیجه رسید که مقدار  $v_t$  بسیار کمتر از  $v$  می‌باشد که در این حالت مقدار مفروض شده برای شرط مناسب به نظر می‌رسد. همچنین با توجه به این موضوع که در روی مرز جامد لزجت آشفته‌گی وجود ندارد، بنابراین مقدار در نظر گرفته شده برای  $\tilde{v}$ ، روی مرز جامد برابر صفر می‌باشد. شرط مرزی در بی‌نهایت نیز همانند شرط اولیه می‌باشد.

### شکل نهایی مدل

در حل معادلات RANS، معادله انتقال مدل آشفته‌گی نیز بمنظور محاسبه تنش‌های رینولدز حل می‌شود. تنش‌های رینولدز از رابطه  $-\overline{u_i u_j} = 2\nu_t S_{ij}$  بدست می‌آید که  $S_{ij} \equiv (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  می‌باشد. مقدار لزجت گردابه‌ای،  $\nu_t$ ، نیز از معادله زیر گرفته می‌شود.

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \dots \dots \dots f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad \chi \equiv \tilde{\nu} / \nu \quad (2-96)$$

$\nu$  لزجت گردابه‌ای است و  $\tilde{\nu}$  که متغیر وابسته می‌باشد از رابطه انتقال زیر بدست می‌آید.

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = C_{b1} [1 - f_{t2}] \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + C_{b2} (\nabla \nu)^2 \right] - \left[ C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right] \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 + f_{t1} \Delta U^2 \quad (2-97)$$

و در روابط زیر  $S$  اندازه ورتیسیتته می‌باشد.

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2} \dots \dots \dots f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 - \chi f_{v1}} \quad (2-98)$$

و  $d$  نزدیکترین فاصله تا دیواره می‌باشد. تابع  $f_w$  نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$f_w(r) = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} \dots \dots \dots g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad r \equiv \tilde{v}/(\tilde{S}k^2 d^2) \quad (2-99)$$

برای مقادیر زیاد  $r$  ،  $f_w$  بسمت عدد ثابتی میل می‌کند.

مقادیر توابع  $f_{t1}$  و  $f_{t2}$  برای ناحیه انتقال نیز از روابط زیر گرفته می‌شود [۲۰].

$$f_{t1} = c_{t1} g_t \exp\left(-c_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} [d^2 + g_t^2 d_t^2]\right) \quad (2-100)$$

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \quad (2-101)$$

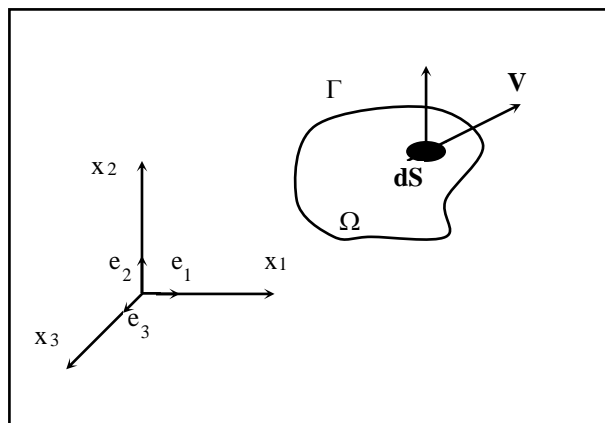
که مقادیر ثابتها نیز از قرار زیر است:

$k$	$\sigma$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$C_{v1}$	$C_{t1}$	$C_{t2}$	$C_{t3}$	$C_{t4}$	$C_{w2}$	$C_{w3}$
۰.۴۱	۲/۳	۰/۱۳۵۵	۰/۶۲۲	۷/۱	۱	۲	۱/۱	۲	۰/۳	۲/۰

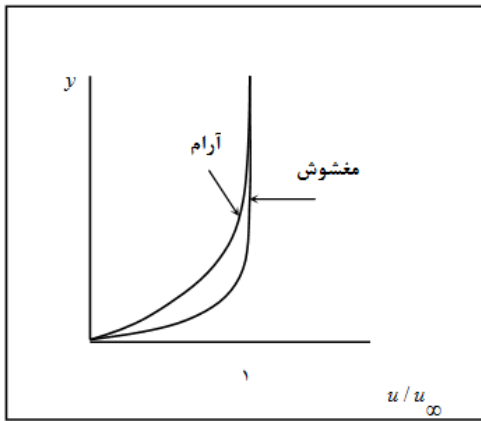
ثابت  $C_{w1}$  نیز عبارتست از:

$$C_{w1} = C_{b1} / k^2 + (1 + C_{b2}) / \sigma \quad (2-102)$$

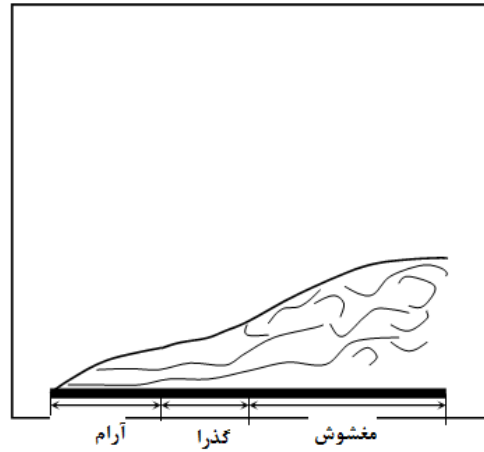
شکل ۱-۲ حجم کنترل جریان در ناحیه  $\Omega$ .



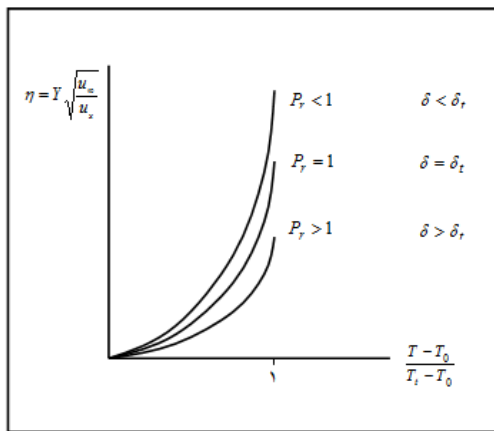




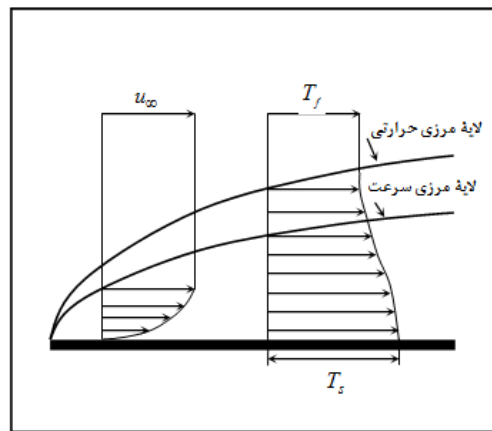
شکل ۲-۳ مقایسهٔ پروفیل‌های سرعت لایه‌های مرزی آرام و مغشوش [۳۴].



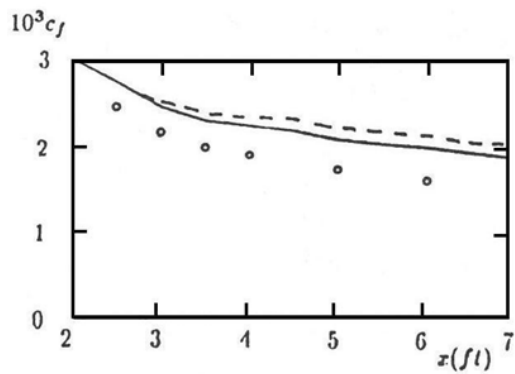
شکل ۲-۲ رژیم‌های مختلف جریان در نزدیکی سطح [۳۴].



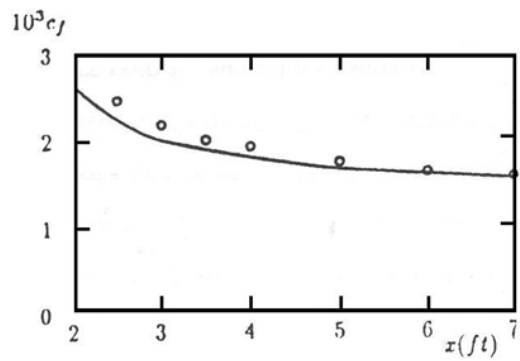
شکل ۲-۵ ضخامت لایهٔ مرزی سرعت با اعداد پرانتل مختلف [۳۴].



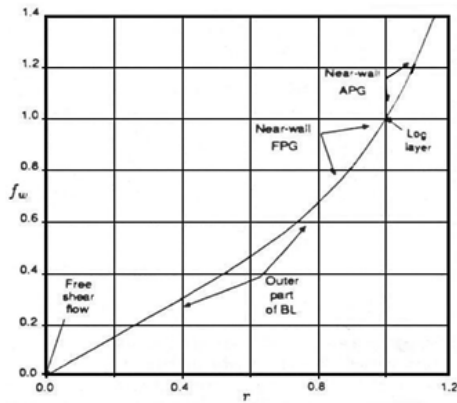
شکل ۲-۴ نمونه‌ای از لایهٔ مرزی سرعت و لایهٔ مرزی حرارتی [۳۴].



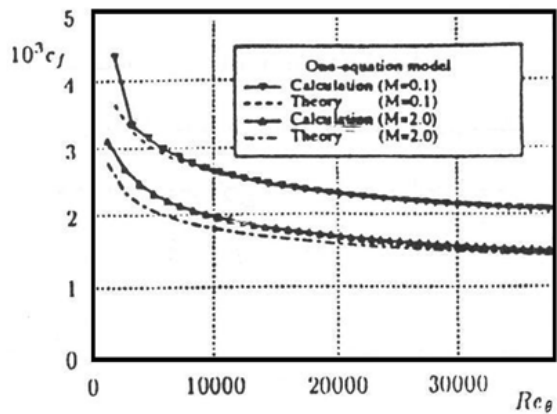
شکل ۲-۷ توزیع اصطکاک روی صفحه تخت در مقایسه با مدل‌های سبسی - اسمیت و بالدوین - لومکس [۳۴].



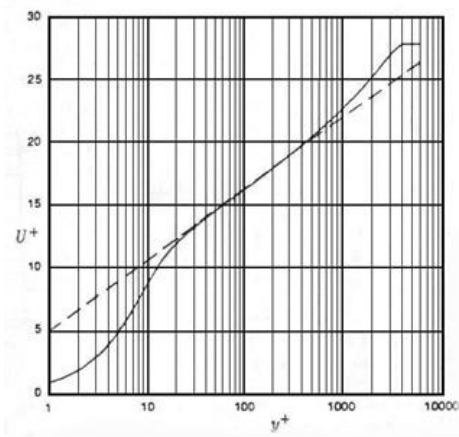
شکل ۲-۶ مقایسه توزیع اصطکاک روی صفحه تخت [۳۴].



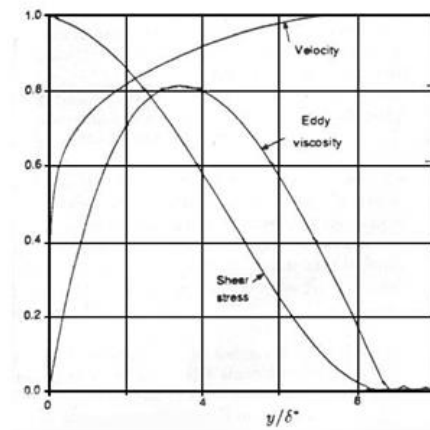
شکل ۲-۹ تغییرات  $f_w$  نسبت به  $r$  [۲۰].



شکل ۲-۸ مقایسه مقادیر اصطکاک سطحی در لایه مرزی صفحه تخت با اعداد ماخ ۰/۱ و ۲/۰ [۳۴].



شکل ۲-۱۱ پروفیل سرعت در لایه مرزی صفحه تخت که خط پیوسته مربوط به مدل اسپالارت-آلماراس و خط چین نشانگر قانون لگاریتمی است [۲۰].



شکل ۲-۱۰ تغییرات خواص مختلف جریان روی صفحه تخت [۲۰].

## مراجع:

- [1]- Marcum, D.L., and Weatherill, N.D., "Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection" AIAA Journal, Vol. 33, No 9, pp. 1619-1625, September 1995.
- [2]- Smith, R.j., and Johnston, L.J., "Automatic Grid Generation and Flow Solution for Complex Geometries" AIAA Journal, Vol. 34, No. 6, pp. 1120-1124, June 1996.
- [3]- Abolhassani, J.S., "Unstructured Grid Generation on NURBS Surfaces", NASA Technical Report Server.
- [4]- Muller, J.D., "Quality Estimates and Stretched Meshes on Delaunay Triangulation" AIAA Journal, Vol. 32, No. 12, pp. 2372-2378, December 1994.
- [5]- Thompson, J.f., and Weatherill, N.p., "structured and Unstructured Grid Generation." Critical Reviews in Biomedical Engineering, Vol 20, No's 1 & 2 pp. 73-120, 1992.
- [6]- Rumsey, C.L., Van Leer, B., and Roe, P.L., "A Multi Dimensional Flux Function with Application to the Euler and Navier-Stokes Equation", Journal of Comput. Phys., vol. 105, 1993.
- [7]- Anderson, W.k., and Bonhaus, D.L., "An Implicit Upwind Algorithm For Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids", Computers Fluid, Vol. 23, No. 1, pp. 1-21, 1994.
- [8]- Barth, T.J., "on Unstructured Grids and Solvers", NASA Technical Report Server.
- [9]- Coirier, W.J., and Powell, K.G., "Solution-Adaptive Cartesian Cell Approach for viscous and Inviscid Flows", AIAA Journal, Vol. 34, No. 5, May 1996.
- [10]- Thompson, J.F., Soni, B.K., and Weatherill, N.P., "HandBook of Grid Generation", CRC Press., London, New York and Washington D.C., 1999.
- [11]- Wilcox, D.C., "Turbulence Modeling for CFD", DCW Industries, La Canada and California, 1993.

- [۱۳]- شهریاری، سیامک. « بررسی مدل‌های دو معادله ای برای اثرگرادیان فشار در جهت توربولانس دو بعدی» پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، تابستان ۱۳۶۹.
- [4]- Tulapurkara, E.G. "Turbulence Models for Computation of Flow Past Airplanes", Prog. Aerospace Sci. Vol 33, pp. 71-165, 1997.
- [۱۴]- خیاطیان یزدی، مصطفی «مدلسازی با استفاده از مقیاس طولی در نواحی نزدیک به دیواره و با عدد رینولدز پایین برای جریانهای تراکم‌مغشوش تراکم‌پذیر» پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۶.
- [15]- Robinson, D.F., and Hassan H.B., "Further Development of  $k-\zeta$  (Enstrophy) Turbulence closure model", AIAA Journal. Vol 36, No 10, October 1998.
- [16]- Smith, R.N. and Hickmott S. "The Computation of Turbulant Flows of Industrial Complexity the Finite Element Method Program Prospect", Industrial Journal for Numerical in Fluids, Vol 7, Pp. 1277-1298, 1987.
- [17]- Chenault, F.C. and Beran, S.P., "k- $\varepsilon$  and Reynolds Stress Turbulence Model. Comparisons for Two-Dimensional Injection Flows", AIAA Journal, Vol 36, Pp. 1401-1412. August 1998.
- [18]- Hang, C.B. and Lin, C.A., "Improved Low-Reynolds-Number  $k-\tilde{\varepsilon}$  Model Based on Direct Numerical Simulation Data", AIAA Journal, Vol 36, pp. 38-43, January 1998.
- [19]- Ilinca, F., "Positivity Preservation and Adaptive Solution for the  $k-\varepsilon$  Model of Turbulence", AIAA Journal, Vol 36, No. 1, pp 44-58, January 1998.
- [20]- Spalrt, P.R. and Allmaras, S.R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", AIAA Paper, 92-0439, January 1991.

[23]- Wong, H. Y., "One-Equation Turbulence Model of Spalart and Allmaras in Supersonic Separated Flows", AIAA Journal, Vol. 37, No. 3, 1999.

[22]- Anderson, W. K. and Bonhaus, D.L., "Aerodynamics Design on Unstructure Grids for Turbulent Flows", NASA TM 112867, June 1997.

[23]- Anderson, W. K., and Bonhaus, D.L., "Airfoil Design on Unstructure Grids for Turbulent Flows", AIAA Journal, Vol. 37, No. 2, February 1999.

[24]- Anderson, W. K. and Bonhaus, D.L., "An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructure Grids", Computers and Fluids, Vol. 33, No 1, pp. 1-21, 1994.

[25]- Batten, P., Craft, T.J., Leschziner and Loyau, H., "Renolds- Stress-Transport Modeling for Compressible Aerodynamics Applications", AIAA Journal, Vol. 37, No 7, pp. 785-797, July 1999.

[26]- Stanescu, D. and Habashi, W. G., "Essentially Nonoscillatory Euler Solutions on Unstructured Meshes Using Extrapolation", AIAA Journal, vol. 36, No. 8, pp. 1413-1416, August 1998.

[27]- Dubuc, L., Cantariti, F., Woodgate, M., Gribben, B., Badcock, K. J. and Richards, B.E. "Solution of the Unsteady Euler Equation Using an Implicit Dual-Time Method", AIAA Journal, Vol. 36, No. 8, pp. 1417-1424, August 1998.

[28]- Merkle, C.L., Sullivan. J.Y., Buelow, P.E., Venkateswaran, S., "Computation of Flow with Arbitrary Equation of State", AIAA Journal, vol. 36, No 4, pp. 515-521, April 1998.

[29]- Essers, J.A., Delanaye, M. and Rogiest, P., "Upwind-Biased Finite-Volume Technique Solving Navier-Stokes Equations on Irregular Meshes", AIAA Journal, Vol. 33, No. 5, pp. 833-842, May 1995.

[30]- Haselbacher, A., McGuirk, J., and Page G.J., “*Finite Volume Discretization Aspect for Viscous Flows on Mixed Unstructured Grids*”, AIAA Journal, Vol. 37, No 2, pp. 177-183, February 1999.

[31]- Manzary, M.T., “*An Unstructured Grid Finite Element Algorithm for Compressible Turbulent Flow Computations*”, PHD dissertation, University Wales Swansea, January 1996.

[32]- Patankar, S.V., “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, McGraw-Hill Book Company, Washington D.C., New York and London, 1993.

[34]- Anderson, D.A. Tannehill, J.C. and Pletcher R.H., ” *Computational Fluid Mechanic and Heat Transfer*”, McGraw-Hill Book Company, Washington D.C., New York and London, 1984.

[35]- Chapara, S.C. and Canale, R.P., “*Numerical Method for Engineering*”, McGraw-Hill Book Company, Washington D.C., New York and London, 1988.

[۳۶]- ایا صوفی، آناهیتا «حل معادلات اولر حول اجسام دارای تقارن محوری با استفاده از شبکه تطبیقی

بی‌سازمان» پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۶.